1.a) Sumamos coordenada a coordenada

$$\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+6\\2+0\\-3+-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\2\\-6\end{pmatrix}$$

1.b) Realizamos el calculo

$$\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} = 1\cdot 2 + 2\cdot 0 + (-3)\cdot(-1) = 2+3 = 5$$

1.c) Queremos normalizar el vector para despues ponderarlo por 3.
Necesitamos la norma de u

$$\|u\| = (1^2 + 2^2 + (-3)^2)^{\frac{1}{2}} = (1+4+9)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{14}$$

Sabemos que la norma de $\frac{u}{\sqrt{14}}$ es 1. Luego $\frac{3}{\sqrt{14}}u$ tiene norma 3.

$$\frac{3}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3/\sqrt{14}\\6/\sqrt{14}\\-9/\sqrt{14}\end{pmatrix}$$

1.d) Recordemos que

$$u \cdot v = \|u\|\|v\| \cdot \cos(\theta)$$

$$\Rightarrow \quad \cos(\theta) = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}$$

con θ el angulo entre ambos vectores

$$\|v\| = (2^2 + 0^2 + (-1)^2)^{\frac{1}{2}} = (4+1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}.$$

luego

$$\cos(\theta) = \frac{5}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{5}{14}}$$

$$\Rightarrow \theta = \arccos\left(\sqrt{\frac{5}{14}}\right)$$

1. e) Calculamos directamente

$$\langle 1, 2, -3 \rangle \times \langle 2, 0, -1 \rangle$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot(-1) - (-3)\cdot 0 \\ (-3)\cdot 2 - (1)(-1) \\ 1\cdot 0 - 2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 - (-1) \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

2) Tenemos $u = \langle 4, 3, -1 \rangle$ y $v = \langle 1, 2, 3 \rangle$. Necesitamos el vector director

$$r = u - v = \langle 4-1, 3-2, -1-3 \rangle$$

$$= \langle 3, 1, -4 \rangle$$

Luego la ecuación parametrica es

$$X = \langle 1, 2, 3 \rangle + t\langle 3, 1, -4 \rangle$$

$$x = 1 + 3t$$

$$y = 2 + t$$

$$z = 3 - 4t$$

Despejemos para obtener la ecuación simetrica

$$t = \frac{x-1}{3} = y - 2 = \frac{3-z}{4}.$$

3) Tenemos los siguientes puntos

$$A = \langle 1, 1, 1 \rangle, \quad B = \langle 1, 0, -1 \rangle, \quad C = \langle 1, 3, -2 \rangle$$

Para tener la ecuación del plano necesitamos el vector normal y un punto en el plano. Sabiendo que el vector normal es perpendicular al plano, Lo obtendremos con el producto cruz de dos vectores del plano,

$$r_1 = \vec{AB} = \langle 1-1, 0-1, -1-1 \rangle = \langle 0, -1, -2 \rangle$$

$$r_2 = \vec{BC} = \langle 1-1, 3-0, -2+1 \rangle = \langle 0, 3, -1 \rangle$$

luego nuestro vector normal será

$$n = r_1 \times r_2 = \langle 0, -1, -2 \rangle \times \langle 0, 3, -1 \rangle$$

$$= \begin{pmatrix} (-1)(-1) - (-2)3 \\ 0 - 0 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - (-6) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Con esto, tenemos la ecuación del plano

$$\Pi : n \cdot (r - A) = 0$$

$$\Pi : \langle 7, 0, 0 \rangle \cdot \langle x-1, y-1, z-1 \rangle = 0$$

$$\Pi : 7x - 7 = 0$$

$$\Pi : x = 1$$

4) Primero obtengamos el vector dirección de la recta, para esto ocupemos la ecuación paramétrica

$$\left.\begin{array}{l} t = x \Rightarrow x = t \\ t = 2y \Rightarrow y = \frac{t}{2} \\ t = 3z \Rightarrow z = \frac{t}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad t\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \rangle$$

Tomando $t = 1$ y $t = 0$, tenemos nuestros 3 puntos $A = \langle 0, 0, 0 \rangle$, $B = \langle 1, 1/2, 1/3 \rangle$, $C = \langle 1, -1, 1 \rangle$, repetimos el proces del inciso anterior

$$r_1 = \vec{AB} = \langle 1, 1/2, 1/3 \rangle$$

$$r_2 = \vec{CB} = \langle 1, -1, 1 \rangle$$

$$n = r_1 \times r_2 = \langle 1, 1/2, 1/3 \rangle \times \langle 1, -1, 1 \rangle$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 \cdot 1 - 1/3 \cdot (-1) \\ 1/3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \\ 1(-1) - 1/2 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 + 1/3 \\ 1/3 - 1 \\ -1 - 1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5/6 \\ -2/3 \\ -3/2 \end{pmatrix}$$

Con esto ya tenemos la ecuación del plano

$$\Pi : n \cdot (r - A) = 0$$

$$\langle 5/6, -2/3, -3/2 \rangle \cdot \langle x, y, z \rangle = 0$$

$$\frac{5}{6}x - \frac{2}{3}y - \frac{3}{2}z = 0$$

$$5x - 4y - 9z = 0$$

5.a) Para obtener el cruce de ambas rectas basta con igualar solo una coordenada, hagamoslo con la segunda

$$-1 + 3 \cdot t = 2 + 0 \cdot s$$

$$3t - 1 = 2$$

$$3t = 3$$

$$t = 1$$

Luego concluimos que en $L_1(1)$ se intersectan

$$\langle 0, -1, -1 \rangle + \langle 1, 3, 1 \rangle$$

$$= \langle 1, 2, 0 \rangle$$

Notar que $L_2(-1) = \langle 1, 2, 0 \rangle$ por lo que el punto es correcto.

5.b) Para obtener el vector normal del plano, basto con los vectores directores de ambas rectas

$r_1 = \langle 1, 3, 1 \rangle$

$r_2 = \langle 2, 0, -1 \rangle$

$$n = r_1 \times r_2 = \langle 1, 3, 1 \rangle \times \langle 2, 0, -1 \rangle$$

$$= \begin{pmatrix} 3(-1) - 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 2 - 1(-1) \\ 1 \cdot 0 - 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 - (-1) \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Luego tomando el punto $A = \langle 1, 2, 0 \rangle$, wego la ecuación del plano es

$$\Pi : n \cdot (r - A) = 0$$

$$\Pi : \langle -3, 3, -6 \rangle \cdot \langle x - 1, y - 2, z \rangle = 0$$

$$\Pi : -3x + 3 + 3y - 6 - 6z = 0$$

$$\Pi : -3x + 3y - 6z = 3$$

$$\Pi : -x + y - 2z = 1$$