Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
MAT1620 – Cálculo II
Segundo Semestre 2025

Ayudantía 2

Sucesiones

Problema 1

Determine si las siguientes sucesiones son convergentes o divergentes:

a) $a_n = \dfrac{n\sin(n)}{n^2+1}$ b) $\left\{\dfrac{1+(-1)^n}{n^2}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ c) $b_n = \dfrac{n!}{n^n}$

Problema 2

Considere la sucesión dada por recurrencia:

$$x_{n+1} = \frac{{x_n}^2+1}{x_n+2} \qquad x_1 = \frac{1}{3}$$

a) Pruebe que para todo n se cumple $0 < x_n < \dfrac{1}{2}$, y $x_n < x_{n+1}$.

b) Demuestre que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ existe, y determínelo.

Problema 3

Sean $x_n = n\cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$ e $y_n = n\sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$. Pruebe que la sucesión

$$z_n = {x_n}^2 + {y_n}^2$$

diverge a infinito, pero que ni $(x_n)_n$ ni $(y_n)_n$ tienden a infinito, cuando $n \to \infty$.

Problema 4

Sean $a, b > 0$. Pruebe que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max\{a, b\}$.

Problema 5*

Una *sucesión de Cauchy* es una sucesión $(a_n)_n$ tal que, para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, si $n, m > N$, entonces $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

a) Muestre directamente de la definición que $a_n = \dfrac{1}{n}$ es una sucesión de Cauchy.

b) Sea $(a_n)_n$ una sucesión de Cauchy tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $a_n \in \mathbb{Z}$, es decir, la sucesión toma valores en los enteros. Muestre que la sucesión converge.

c) Muestre que, si una sucesión es convergente, entonces es de Cauchy (*Piense: ¿Es el recíproco* ***siempre*** *cierto? Más concretamente: Dada una sucesión de Cauchy definida sobre un cuerpo* $\mathbb{K}$*, ¿es necesariamente convergente dentro del mismo cuerpo?*).

d) **Propuesto:** Muestre que, si $(a_n)_n$ es una sucesión *de números reales* (es decir, definida sobre $\mathbb{R}$), entonces $(a_n)_n$ converge si y solo si es una sucesión de Cauchy.

Problema 6*

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión, la cual converge a un límite a, es decir $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Considere la sucesión definida como

$$b_n = \frac{a_1 + ... + a_n}{n}$$

Demuestre que la sucesión b_n converge y su límite es el mismo que el de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, es decir:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = a$$

Hint: Primero escriba $|b_n - a|$ de manera conveniente. Luego utilice el hecho de que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente para encontrar un N tal que $|a_k - a|$ sea menor que $\varepsilon/2$. Por último, utilice la desigualdad triangular y la *propiedad arquimediana*.