Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
MAT1620 – Cálculo II
Segundo Semestre 2025

Ayudantía 12

Integrales dobles sobre regiones generales

Problema 1

Calcule las siguiente integrales:

a) $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} \frac{1+x^2}{1+y^2}\,\mathrm{d}A,\ \mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1\}$

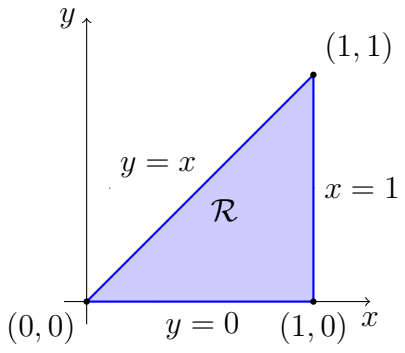
b) $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} \frac{1}{x+y+1}\,\mathrm{d}A,\ \mathcal{R}$: Región limitada por las rectas $y = 0, x = 1$ e $y = x$.

Respuesta

a) El ejercicio se puede mostrar como integral iterada:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^1 \frac{1+x^2}{1+y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(1+x^2\right) \int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(1+x^2\right) \left[\arctan(y)\right]_0^1\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(1+x^2\right) \frac{\pi}{4}\,\mathrm{d}x \\ \iint_{\mathcal{R}} \frac{1+x^2}{1+y^2}\,\mathrm{d}A &= \frac{\pi}{4}\left(1+\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

b) A continuación se muestra la región $\mathcal{R}$:



Entonces, se aprecia como

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq x\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1\}\end{aligned}$$

Tomando la primera opción:

$$I = \iint_{\mathcal{R}} \frac{1}{x+y+1}\,\mathrm{d}A = \int_0^1 \int_0^x \frac{1}{x+y+1}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \big(\ln(2x+1) - \ln(x+1)\big)\,\mathrm{d}x.$$

Resolviendo la primera integral con sustitución

$$\int_0^1 \ln(2x+1)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{u=2x+1} \frac{1}{2}\int_1^3 \ln u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\big[u\ln u - u\big]_1^3 = \frac{1}{2}(3\ln 3 - 2).$$

Resolviendo la segunda integral con sustitución

$$\int_0^1 \ln(x+1)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{u=x+1} \int_1^2 \ln u\,\mathrm{d}u = [u\ln u - u]_1^2 = 2\ln 2 - 1.$$

Finalmente:

$$I = \frac{1}{2}(3\ln 3 - 2) - (2\ln 2 - 1) = \frac{3}{2}\ln 3 - 2\ln 2 = \ln\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$$

Problema 2

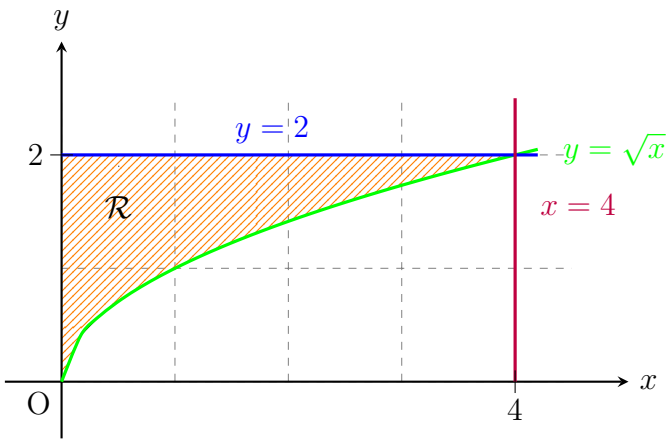
Calcule las siguientes integrales cambiando el orden de integración de forma conveniente.

a) $\displaystyle\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{y^3+1}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x \sin(2y-y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \int_0^{2-x} \sin(2y-y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

Respuesta

a) Graficando la región de integración:



La integral de la pregunta tiene la siguiente región de tipo 1:

$$\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 4 \wedge \sqrt{x} \le y \le 2\}$$

Que por el gráfico se ve que es equivalente a la siguiente región de integración de tipo 2:

$$\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le y^2 \wedge 0 \le y \le 2\}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{y^3+1}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_0^2 \int_0^{y^2} \frac{1}{y^3+1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^2 \frac{y^2}{y^3+1}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{3}\ln(y^3+1)\Big|_0^2 \\
&= \frac{\ln 9}{3}
\end{aligned}$$

b) Sean

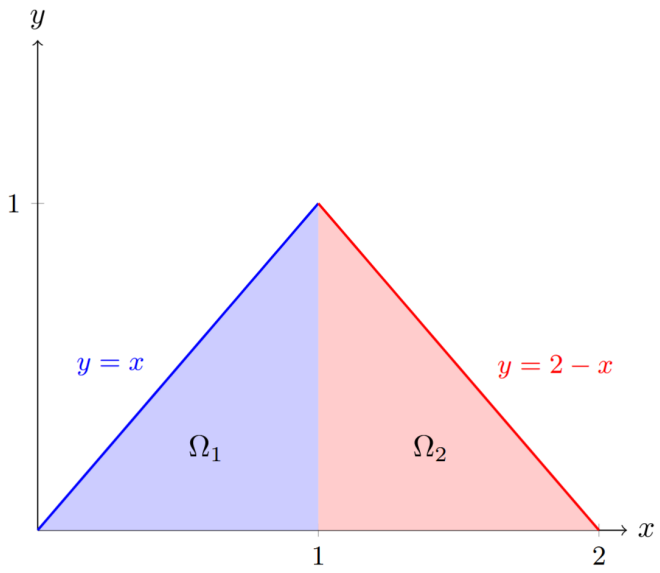
$$\begin{aligned}\Omega_1 &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq x\},\\ \Omega_2 &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq 2-x\},\\ \Omega &:= \Omega_1 \cup \Omega_2.\end{aligned}$$

Denotando $f(x,y) = \sin(2y - y^2)$, tenemos que

$$\int_0^1 \int_0^x f(x,y)dydx + \int_1^2 \int_0^{2-x} f(x,y)dydx = \iint_{\Omega_1} f(x,y)dydx + \iint_{\Omega_2} f(x,y)dydx$$

$$= \iint_{\Omega} f(x,y)dydx.$$

Graficando, observamos que



de donde es fácil ver que podemos escribir $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 \wedge y \leq x \leq 2 - y\}$. De este modo, tenemos

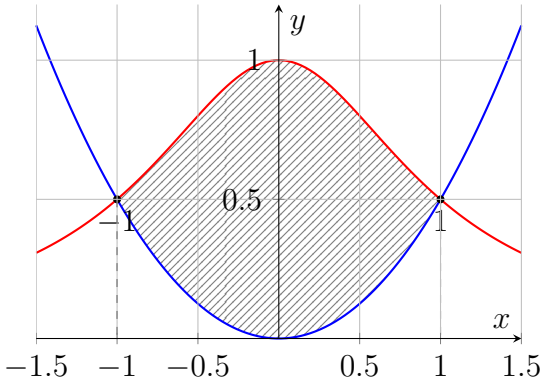
$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} \sin(2y - y^2)dydx &= \iint_{\Omega} \sin(2y - y^2)dxdy = \int_0^1 \int_y^{2-y} \sin(2y - y^2)dxdy\\ &= \int_0^1 \sin(2y - y^2)x\Big|_{x=y}^{x=2-y} dy\\ &= \int_0^1 \sin(2y - y^2)(2 - 2y)dy\\ &= -\cos(2y - y^2)\Big|_{y=0}^{y=1}\\ &= -\cos(1) + \cos(0)\\ &= 1 - \cos(1).\end{aligned}$$

Problema 3

Calcule el área encerrada por la parábola $y = \frac{x^2}{2}$ y la curva $y = \frac{1}{1+x^2}$

Respuesta

Para poder encontrar los puntos de intersección primero nos imaginamos / dibujamos el gráfico:



Primero identificamos la región de integración

- Puntos de intersección: $\frac{x^2}{2} = \frac{1}{1+x^2} \implies x^4 + x^2 - 2 = 0 \implies x = \pm 1$.
- La región R es de Tipo I:

$$R = \left\{ (x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, \quad \frac{x^2}{2} \leq y \leq \frac{1}{1+x^2} \right\}$$

Planteamos la integral doble: El área se define como:

$$A = \iint_R dA = \int_{-1}^{1} \left[\int_{\frac{x^2}{2}}^{\frac{1}{1+x^2}} dy \right] dx$$

Calculamos

1. Integración respecto a y:

$$\int_{\frac{x^2}{2}}^{\frac{1}{1+x^2}} dy = [y]_{\frac{x^2}{2}}^{\frac{1}{1+x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2}$$

2. Integración respecto a x, usando simetría:

$$A = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = 2 \int_{0}^{1} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx$$

$$A = 2 \left[[\arctan(x)]_0^1 - \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 \right]$$

$$A = 2 \left[\left(\frac{\pi}{4} - 0 \right) - \frac{1}{6} (1 - 0) \right]$$

$$A = 2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$$

Por lo tanto

$$\mathbf{A} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$$

Problema 4*

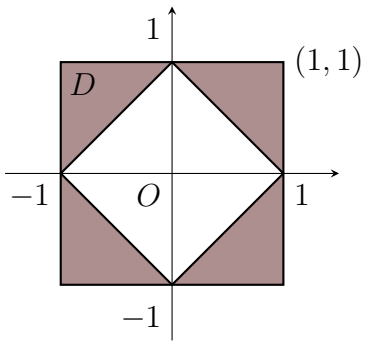
Exprese la región D como una unión de regiones y evalúe la integral

$$\iint_D x^2\,dA$$

La región D es el cuadrado $S = [-1,1] \times [-1,1]$ menos el rombo central R cuyos límites están definidos por $|x| + |y| = 1$.

Respuesta

Graficando el dominio:



Por la aditividad de la integral, $D = S \setminus R$.

$$\iint_D x^2\,dA = \iint_S x^2\,dA - \iint_R x^2\,dA$$

Primero integramos sobre el cuadrado exterior: $S = [-1,1] \times [-1,1]$

$$\begin{aligned}\iint_S x^2\,dA &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x^2\,dy\,dx \\ &= \int_{-1}^{1} [x^2 y]_{-1}^{1}\,dx = \int_{-1}^{1} 2x^2\,dx \\ &= 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 2\left(\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{4}{3}\end{aligned}$$

Ahora integramos sobre el rombo del centro:
Por simetría, $\iint_R x^2\,dA = 4\iint_{R_1} x^2\,dA$, donde R_1 es el triángulo en el primer cuadrante ($0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1 - x$).

$$\begin{aligned}\iint_{R_1} x^2\,dA &= \int_0^1 \int_0^{1-x} x^2\,dy\,dx \\ &= \int_0^1 [x^2 y]_0^{1-x}\,dx = \int_0^1 x^2(1-x)\,dx \\ &= \int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4-3}{12} = \frac{1}{12}\end{aligned}$$

$$\iint_R x^2\,dA = 4 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$$

Finalmente,

$$\iint_D x^2\,dA = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

Por lo tanto, la integral es 1