1.a) $\int_3^\infty \frac{dx}{(x-2)^{3/2}}$. Corresponde a una integral impropia de tipo I.
Utilizando el cambio de variable $u = x-2$ se obtiene

$$\int_3^\infty \frac{dx}{(x-2)^{3/2}} = \int_1^\infty \frac{du}{u^{3/2}}$$ ← lo cual converge por criterio "p"

Resolvemos utilizando $\int_1^\infty \frac{du}{u^{3/2}} = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{du}{u^{3/2}}$

$$\int_1^t \frac{du}{u^{3/2}} = \int_1^t u^{-3/2}\,du$$

$$= -2u^{\frac{-1}{2}}\Big|_1^t$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{t}} + 2 = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

$$\Rightarrow \int_3^\infty \frac{dx}{(x-2)^{3/2}} = \lim_{t\to\infty} 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) = 2$$ //

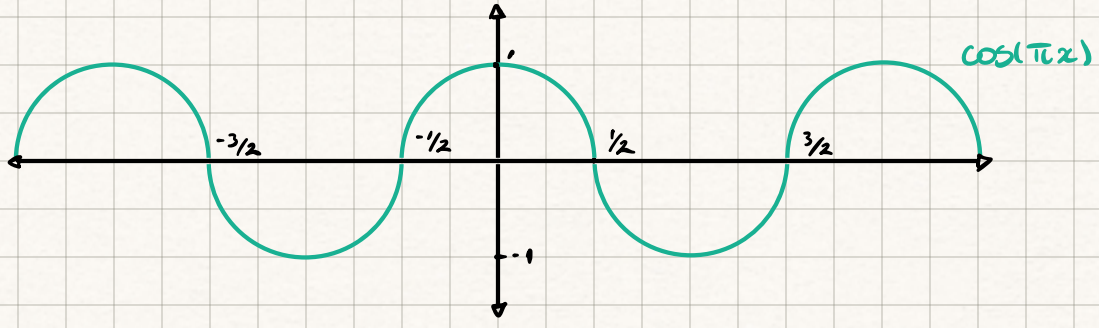
1.b) $\int_{-\infty}^0 5^x dx$. Notemos que $\int_{-\infty}^0 5^x dx = \int_{-\infty}^0 e^{x\ln(5)} dx$. Luego converge.
Resolvemos.

$$\int_{-t}^0 e^{x\ln(5)} = \frac{5^x}{\ln(5)}\Big|_{-t}^0 = \frac{1}{\ln(5)}\left(1 - \frac{1}{5^t}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\ln(5)}\left(1 - \frac{1}{5^t}\right) = \frac{1}{\ln(5)}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^0 5^x dx = \frac{1}{\ln(5)}$$ //

1.c) $\int_{-\infty}^\infty \cos(\pi x)\,dx$. La intuición grafica nos dice que esta integral diverge



Comprobemoslo.

$$\int_{-t}^t \cos(\pi x)dx = \frac{1}{\pi}\operatorname{sen}(\pi x)\Big|_{-t}^t = \frac{1}{\pi}(\operatorname{sen}(\pi t) - \operatorname{sen}(-\pi t)) = \frac{2}{\pi}\operatorname{sen}(\pi t)$$

Luego

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\pi x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \frac{2}{\pi}\operatorname{sen}(\pi t)$$ ✗ no converge, oscila. //

1. d) $\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$. Corresponde a una integral impropia de tipo II, ya que existe discontinuidad en $x=1$, en particular una asintota vertical. Utilizando el cambio de variable $u = x-1$ se obtiene.

$$\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \int_{-1}^{8} \frac{du}{u^{1/3}}$$

$$= \int_{-1}^{0} \frac{du}{u^{1/3}} + \int_0^8 \frac{du}{u^{1/3}}$$

$$= \underbrace{\int_0^8 \frac{du}{u^{1/3}}}_{I_1} - \underbrace{\int_0^1 \frac{du}{u^{1/3}}}_{I_2}$$ ← ambas convergen por criterio "p"

Resolvemos.

$$I_1)\quad \int_t^8 \frac{du}{u^{1/3}} = \frac{3}{2}u^{2/3}\Big|_t^8 = \frac{3}{2}\left(8^{2/3} - t^{2/3}\right) \xrightarrow{t\to 0^+} \frac{3}{2}8^{2/3} = 6$$

$$I_2)\quad \int_0^1 \frac{du}{u^{1/3}} = \frac{3}{2}u^{2/3}\Big|_t^1 = \frac{3}{2}\left(1 - t^{2/3}\right) \xrightarrow{t\to 0^+} \frac{3}{2}.$$

Luego

$$\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = I_1 - I_2 = 6 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$ //

2. a) $\int_0^\infty \frac{x}{x^3+1}\,dx$. Vemos que la función es racional y "tiene grado" -2 (*grado del numerador - *grado del denominador). Luego por criterio "p" sospechamos que la integral convergera.

$$\frac{x}{x^3+1} \le \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{x}{x^3+1}\,dx \le \int_0^\infty \frac{dx}{x^2}$$ ← pero esto diverge.

Solución: Separar la integral $\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$. Luego

$$\int_1^\infty \frac{x}{x^3+1}\,dx \le \int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$$ ← esto si converge

Por criterio de comparación $\int_1^\infty \frac{x}{x^3+1}\,dx$ converge. Finalmente

$$\int_0^\infty \frac{x}{x^3+1}\,dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{x}{x^3+1}\,dx}_{\text{converge}} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{x}{x^3+1}\,dx}_{\text{converge}} < \infty \quad //$$

2. b) $\int_0^1 \frac{\sec^2(x)}{x\sqrt{x}}\,dx$. Notamos que el "grado" de esta función es similar a $\left(\frac{-3}{2}\right)$. Luego al ser integral impropia tipo II, sospechamos que divergirá. Observar que para todo x en el intervalo $[0,1]$, tenemos que

$$1 \leq \sec^2(x) \leq \sec^2(1)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sec^2(x)}{x\sqrt{x}} \geq \frac{1}{x\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \quad \int_1^0 \frac{\sec^2(x)}{x\sqrt{x}}\,dx \geq \int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x}}$$ ← esto diverge

$$\Rightarrow \int_1^0 \frac{\sec^2(x)}{x\sqrt{x}}\,dx \geq \infty \quad //$$

3) Primero notar que si $\alpha \geq 0$ entonces la integral diverge.

$\underline{\alpha = 0}$ $te^{-\alpha t} = t \xrightarrow{t\to\infty} \infty$

$\underline{\alpha < 0}$ $te^{-\alpha t} = te^{|\alpha| t} \xrightarrow{t\to\infty} \infty$

Veamos que ocurre con $\alpha > 0$.

$\int_0^K te^{-\alpha t}\,dt$ ocupando la sustitución: $u = t$, $du = dt$, $v = \frac{-1}{\alpha}e^{-\alpha t}$, $dv = e^{-\alpha t}\,dt$

$$= \left(\frac{-1}{\alpha} te^{-\alpha t}\Big|_0^K\right) - \int_0^K \frac{-1}{\alpha} e^{-\alpha t}\,dt$$

$$= \frac{-1}{\alpha} Ke^{-\alpha K} + \frac{1}{\alpha}\int_0^K e^{-\alpha t}\,dt$$

$$= \frac{-1}{\alpha} Ke^{-\alpha K} + \frac{1}{\alpha}\left(\frac{-1}{\alpha} e^{-\alpha t}\Big|_0^K\right)$$

$$= \frac{-1}{\alpha} Ke^{-\alpha K} - \frac{1}{\alpha^2}\left(e^{-\alpha K} - 1\right)$$

$$= \frac{-1}{\alpha} Ke^{-\alpha K} - \frac{1}{\alpha^2} e^{-\alpha K} + \frac{1}{\alpha^2}$$

$$= \frac{-K}{\alpha e^{\alpha K}} - \frac{1}{\alpha^2 e^{\alpha K}} + \frac{1}{\alpha^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{K\to\infty} \frac{-K}{\alpha e^{\alpha K}} - \frac{1}{\alpha^2 e^{\alpha K}} + \frac{1}{\alpha^2}$$

$$= \frac{1}{\alpha^2} \quad //$$

4) Esta integral impropia corresponde a las del tipo I. Notemos que si $C \leq 0$, entonces diverge

$C=0$) $\int_0^\infty \frac{x}{x^2+1} - \frac{c}{3x+1}\,dx = \int_0^\infty \frac{x\,dx}{x^2+1} \to \infty$ diverge

$c<0$) $\int_0^\infty \frac{x}{x^2+1} - \frac{c}{3x+1}\,dx = \underbrace{\int_0^\infty \frac{x}{x^2+1}\,dx}_{\to +\infty} + \underbrace{\int_0^\infty \frac{|c|}{x^2+1}\,dx}_{\to +\infty} \to +\infty$ diverge

Sin embargo, si $c > 0$

$$\int_0^\infty \frac{x}{x^2+1} - \frac{c}{3x+1}\,dx = \underbrace{\int_0^\infty \frac{x}{x^2+1}\,dx}_{\to +\infty} - \underbrace{\int_0^\infty \frac{c}{3x+1}\,dx}_{\to +\infty} \to \infty - \infty$$ indefinido

Desarrollamos para encontrar el C que funcione

$$\int_0^\infty \frac{x}{x^2+1} - \frac{c}{3x+1}\,dx = \int_0^\infty \frac{x(3x+1) - c(x^2+1)}{(x^2+1)(3x+1)}\,dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{3x^2 + x - cx^2 - c}{3x^3 + x^2 + 3x + 1}\,dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{(3-c)x^2 + x - c}{3x^3 + x^2 + 3x + 1}\,dx$$

Por criterio "p", necesitamos que

$$*\text{grado numerador} - *\text{grado denominador} < -1$$

Si $C = 3$, se cumple lo que queremos ya que se cancela el termino cuadratico del numerador quedando $*\text{grado numerador} = 1$ y $*\text{grado denominador} = 3$. Procedemos a calcular el valor de la integral.

$$\int_0^\infty \frac{x}{x^2+1} - \frac{3}{3x+1}\,dx = \underbrace{\int_0^\infty \frac{x}{x^2+1}\,dx}_{I_1} - \underbrace{\int_0^\infty \frac{3}{3x+1}\,dx}_{I_2} = I_1 - I_2$$

I_1) $\int_0^t \frac{x}{x^2+1}\,dx$ $u = x^2+1$, $du = 2x\,dx$

$= \frac{1}{2}\int_1^{t^2+1} \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln(t^2+1)$

I_2) $\int_0^t \frac{3}{3x+1}\,dx$ $u = 3x+1$, $du = 3dx$

$= \int_1^{3t+1} \frac{du}{u} = \ln(3t+1)$

$$\int_0^\infty \frac{x}{x^2+1} - \frac{3}{3x+1}\,dx = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2}\ln(t^2+1) - \lim_{t\to\infty} \ln(3t+1)$$

$$= \lim_{t\to\infty} \ln\left(\sqrt{t^2+1}\right) - \ln(3t+1)$$

$$= \lim_{t\to\infty} \ln\left(\frac{\sqrt{t^2+1}}{3t+1}\right) = \ln\left(\lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt{t^2+1}}{3t+1}\right)$$

$$= \ln\left(\lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt{1+1/t^2}}{3+1/t}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{3}\right)$$

Recuerdo Criterio "P"

Sea $a > 0$, se tiene lo siguiente

- $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ converge si y solo si $P > 1$ ← Integrales de tipo I

- $\int_0^{a} \frac{dx}{x^p}$ converge si y solo si $P < 1$ ← Integrales de tipo II