1.a) Evaluamos directamente

$$F(3,1) = 1 + \sqrt{4 - 1^2} = 1 + \sqrt{3}$$

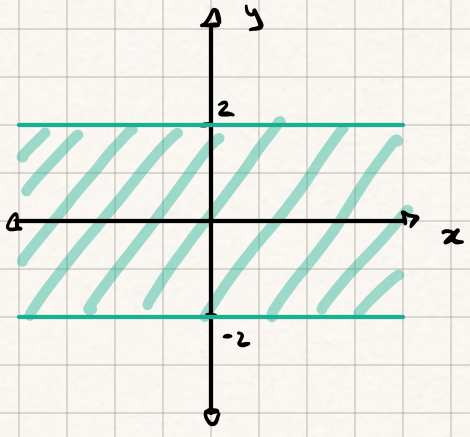
1.b) Notamos que la función puede tener conflictos adentro de la raiz.

$$4 - y^2 \geq 0$$

$$y^2 \leq 4$$

$$-2 \leq y \leq 2$$

Como x no esta en la expresión no tiene restricción. Graficamos el area



1.c) Buscamos el maximo y el minimo valor que puede tener la función. Notamos que esto ocurre cuando $y^2 = 0$, $y^2 = 4$ respectivamente

$$F(x,0) = 1 + \sqrt{4 - 0^2} = 1 + 2 = 3$$

$$F(x,2) = 1 + \sqrt{4 - 4} = 1$$

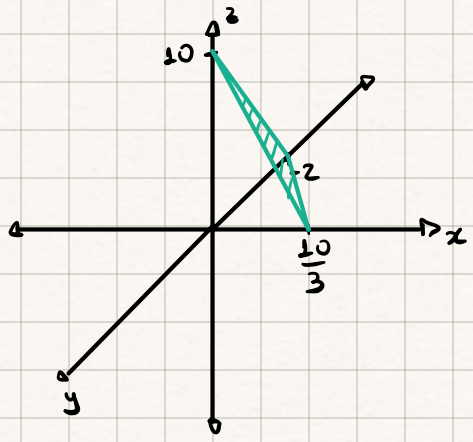
Concluimos que el rango es $[1, 3]$.

2.a) Notamos que la función es lineal, por lo que describe un plano. Veamos su punto de intersecion con los ejes.

$$\text{eje } X \Rightarrow y = z = 0 \Rightarrow \quad 0 = 10 - 3x \Rightarrow \quad x = \frac{10}{3}$$

$$\text{eje } Y \Rightarrow x = z = 0 \Rightarrow \quad 0 = 10 + 5y \Rightarrow \quad y = -2$$

$$\text{eje } Z \Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow \quad z = 10.$$



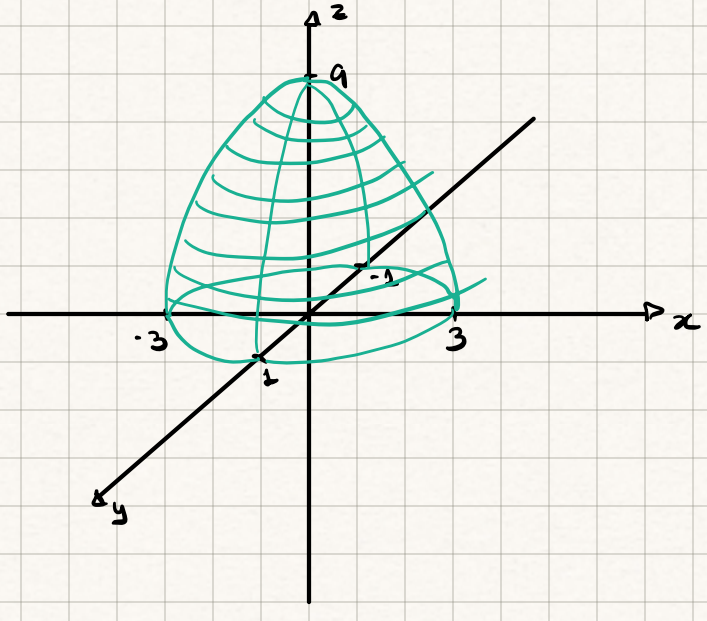
2.b) Tendra la forma de un paraboloide eliptico, lo cual corresponde a trazas verticales parabolicas y trazas horizontales elipticas
Veamos donde se cruza con los ejes.

eje X : $y = z = 0 \Rightarrow 0 = 9 - x^2 \Rightarrow x = \pm 3$

eje Y : $x = z = 0 \Rightarrow 0 = 9 - 9y^2 \Rightarrow y = \pm 1$

eje z : $x = y = 0 \Rightarrow z = 9$.

Luego



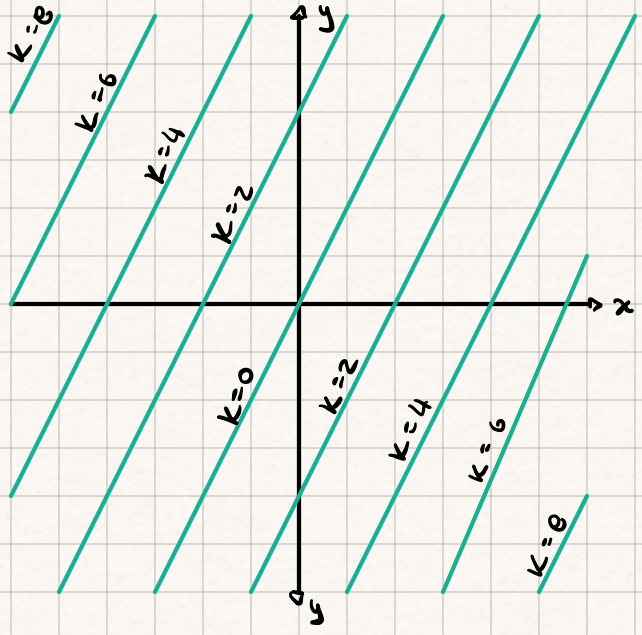
3) Para encontrar las curvas de nivel, fijamos $f(x,y) = k$ e intentamos despejar. Notar que $k \geq 0$ necesariamente.

$$k = (y - 2x)^2$$

$$\Rightarrow \{y - 2x = k\} \cup \{y - 2x = -k\}$$

$$\{y = 2x + k\} \cup \{y = 2x - k\}$$

Nuestras curvas de nivel corresponden a rectas trasladadas



4.a) Comprobemos que el limite no existe. Veamos el limite por la curva $x=0$,

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{-4y^2}{2y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{-4y^2}{2y^2} = -2.$$

Ahora por la curva $y=0$

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^6}{x^2} = \lim_{x\to 0} x^2 = 0.$$

Concluimos que el limite no existe.

4.b) La expresion puede ser reescrita como

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{xy-y}{(x-1)^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y(x-1)}{(x-1)^2+y^2}$$

cambio de variable
$x-1 \Rightarrow x$
$x\to 1 \Rightarrow x\to 0$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{yx}{x^2+y^2}$$

Utilizando la curva $y=0$

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{0}{x^2} = 0$$

Utilizando la curva $y=x$

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{x^2}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

Concluimos que el limite no existe

4.c) Podemos utilizar coordenadas polares.

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\operatorname{sen}\theta$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta\, r\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta}}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{r^2}}$$

$$= \lim_{r\to 0} r\cos\theta\operatorname{sen}\theta = 0$$

Concluimos que el limite existe.

4.d) Podemo utilizar coordenadas polares

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) = \lim_{r\to 0} r^2\ln(r^2)$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{\ln(r^2)}{\frac{1}{r^2}} \quad \ln(r^2)\to -\infty,\ \frac{1}{r^2}\to\infty$$

L'H

$$= \lim_{r\to 0} \frac{\frac{2r}{r^2}}{\frac{-2}{r^3}}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{-2r^4}{2r^2} = \lim_{r\to 0} -r^2 = 0$$

Concluimos que el limite existe.

5) Notamos que el único punto problemático es el $(0,0)$. Por lo que sabemos que el límite tiene que existir y ser igual a la función

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{2x^2+y^2}$$

Tomando la trayectoria $y=0$ tenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{0}{2x^2} = 0$$

Notar que en el caso de existir el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \neq f(0,0) = 1.$$

Concluimos que la función es continua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.