Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
MAT1620 – Cálculo II
Segundo Semestre 2025

Ayudantía 11

Multiplicadores de Lagrange. Integrales Dobles sobre Regiones Rectangulares

---

Problema 1

Encuentre los máximos y mínimos de la función:

$$f(x, y, z) = 3x + 6y + 9z$$

sujeta a la siguiente restricción:

$$g(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 = 16$$

Respuesta

Planteamos los gradientes de las funciones y de las restricciones:

$$\nabla f(x, y, x) = < 3, 6, 9 >$$
$$\nabla g(x, y, x) = < 2x, 2y, 2z >$$

Ahora planteamos la ecuación pertinente:

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, x)$$

$$g(x, y, z) = k_1$$

Las ecuaciones quedan tal que:

1) $3 = 2\lambda x$

2) $6 = 2\lambda y$

3) $9 = 2\lambda z$

4) $x^2 + y^2 + z^2 = 16$

Por inspección, λ no puede ser cero, por lo que podemos dividir las 3 primeras ecuaciones por λ .

1) $\frac{3}{2\lambda} = x$

2) $\frac{6}{2\lambda} = y$

3) $\frac{9}{2\lambda} = z$

Elevando al cuadrado obtenemos:

1) $\frac{3}{2\lambda} = x$

2) $\frac{6}{2\lambda} = y$

3) $\frac{9}{2\lambda} = z$

podemos elevar cada termino al cuadrado:

1) $\frac{9}{4\lambda^2} = x^2$

2) $\frac{36}{4\lambda^2} = y^2$

3) $\frac{81}{4\lambda^2} = z^2$

Y podemos reemplazar en 4)

$$\frac{9}{4\lambda^2} + \frac{36}{4\lambda^2} + \frac{81}{4\lambda^2} = 16$$

$$\frac{126}{64} = \lambda^2$$

$$\lambda_1 = \frac{3}{8}\sqrt{14}$$

$$\lambda_2 = -\frac{3}{8}\sqrt{14}$$

Podemos despejar las ecuaciones 1), 2) y 3) y reemplazar λ_1:

1) $\frac{24}{6\sqrt{14}} = \frac{4}{\sqrt{14}} = x$

2) $\frac{48}{6\sqrt{14}} = \frac{8}{\sqrt{14}} = y$

3) $\frac{72}{6\sqrt{14}} = \frac{12}{\sqrt{14}} = z$

Y evaluando en la función obtenemos:

$$f(\frac{4}{\sqrt{14}}, \frac{8}{\sqrt{14}}, \frac{12}{\sqrt{14}}) = 3 * \frac{4}{\sqrt{14}} + 6 * \frac{6}{\sqrt{14}} + 9 * \frac{12}{\sqrt{14}} = \frac{168}{\sqrt{14}} = 12\sqrt{14}$$

Lo que corresponde a un máximo.

Para λ_2 El procedimiento es análogo, obteniendo un mínimo:

$$f(-\frac{4}{\sqrt{14}}, -\frac{8}{\sqrt{14}}, -\frac{12}{\sqrt{14}}) = -12\sqrt{14}$$

Problema 2

a) Mediante multiplicadores de Lagrange, demuestre que el rectángulo de área máxima y de perímetro fijo p es un cuadrado y calcule su medida con respecto a p.

b) El plano $4x - 3y + 8z = 5$ forma una elipse al intersecar el cono $z^2 = x^2 + y^2$. Encuentre el punto más alto y más bajo de la elipse.

Respuesta

a) Sea $x > 0$ y $y > 0$ los lados de un rectángulo. Queremos maximizar el área

$$A(x, y) = xy$$

sujeto a la restricción de perímetro fijo

$$2(x + y) = p,$$

donde $p > 0$ es constante.

Planteamos el problema de Lagrange con el multiplicador λ. Definimos

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = xy + \lambda\big(2(x + y) - p\big).$$

Las condiciones de primer orden (estacionariedad) son:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= y + 2\lambda = 0, \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} &= x + 2\lambda = 0, \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= 2(x + y) - p = 0.
\end{aligned}$$

De las dos primeras ecuaciones obtenemos

$$y + 2\lambda = 0 \quad \text{y} \quad x + 2\lambda = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = y.$$

Sustituyendo $x = y$ en la restricción $2(x + y) = p$ resulta

$$2(2x) = p \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{p}{4},$$

y por tanto $y = \dfrac{p}{4}$. Así el candidato estacionario es el rectángulo con lados

$$x = y = \frac{p}{4},$$

es decir, un cuadrado de lado $p/4$.

Para verificar que este punto da máximo (y no mínimo ni silla), basta observar una razón directa: para $x, y > 0$ con $x + y = \dfrac{p}{2}$ fijo, la función $A(x, y) = xy$ puede escribirse como

$$A(x, y) = x\left(\frac{p}{2} - x\right) = -x^2 + \frac{p}{2}x,$$

que es una cuadrática en x con coeficiente principal negativo, por lo que alcanza su máximo cuando

$$\frac{dA}{dx} = -2x + \frac{p}{2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{p}{4},$$

confirmando que el máximo ocurre en $x = y = p/4$. También se puede usar la desigualdad aritmético-geométrica:

$$\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy} \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{p}{4}\right)^2 \geq xy,$$

con igualdad si y sólo si $x = y$.

Concluimos que, entre todos los rectángulos de perímetro p fijo, el de mayor área es el cuadrado cuyos lados son $p/4$.

b) Buscamos extremos de la función $A(x, y, z) = z$ sujeta a las restricciones

$$g(x, y, z) = 4x - 3y + 8z - 5 = 0 \qquad h(x, y, z) = z^2 - x^2 - y^2 = 0$$

El sistema de Lagrange se escribe como

$$\begin{cases} \nabla A = \lambda \nabla g + \mu \nabla h \\ g = 0 \\ h = 0 \end{cases}$$

Calculamos los gradientes:

$$\nabla A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \nabla g = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix} \qquad \nabla h = \begin{bmatrix} -2x \\ -2y \\ 2z \end{bmatrix}$$

Sustituyendo en la ecuación vectorial:

$$\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix}4\\-3\\8\end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix}-2x\\-2y\\2z\end{bmatrix}$$

Por componentes:

$$\begin{cases} 0 = 4\lambda - 2\mu x \\ 0 = -3\lambda - 2\mu y \\ 1 = 8\lambda + 2\mu z \end{cases}$$

De aquí se obtiene:

$$x = \frac{2\lambda}{\mu} \qquad y = -\frac{3\lambda}{2\mu} \qquad z = \frac{1-8\lambda}{2\mu}$$

De la ecuación del cono $z^2 = x^2 + y^2$:

$$\left(\frac{1-8\lambda}{2\mu}\right)^2 = \left(\frac{2\lambda}{\mu}\right)^2 + \left(-\frac{3\lambda}{2\mu}\right)^2 \Rightarrow (1-8\lambda)^2 = 25\lambda^2$$

De aquí:

$$\lambda = \frac{1}{13} \quad \text{o} \quad \lambda = \frac{1}{3}$$

Usamos ahora el plano $4x - 3y + 8z = 5$. Sustituyendo x, y, z en términos de λ, μ:

$$4\left(\frac{2\lambda}{\mu}\right) - 3\left(-\frac{3\lambda}{2\mu}\right) + 8\left(\frac{1-8\lambda}{2\mu}\right) = 5$$

Simplificando:

$$\frac{8\lambda}{\mu} + \frac{9\lambda}{2\mu} + \frac{4-32\lambda}{\mu} = 5 \Rightarrow \frac{8-39\lambda}{2\mu} = 5 \Rightarrow \mu = \frac{8-39\lambda}{10}$$

Caso 1: $\lambda = \frac{1}{13}$

$$\mu = \frac{8 - 39/13}{10} = \frac{1}{2} \qquad x = \frac{2\lambda}{\mu} = \frac{4}{13} \quad y = -\frac{3\lambda}{2\mu} = -\frac{3}{13} \quad z = \frac{1-8\lambda}{2\mu} = \frac{5}{13}$$

Luego, el punto buscado es:

$$\boxed{\left(\frac{4}{13}, -\frac{3}{13}, \frac{5}{13}\right)}$$

Caso 2: $\lambda = \frac{1}{3}$

$$\mu = \frac{8 - 39/3}{10} = -\frac{1}{2} \qquad x = \frac{2\lambda}{\mu} = -\frac{4}{3} \quad y = -\frac{3\lambda}{2\mu} = 1 \quad z = \frac{1 - 8\lambda}{2\mu} = \frac{5}{3}$$

El punto buscado es:

$$\boxed{\left(-\frac{4}{3}, 1, \frac{5}{3}\right)}$$

Concluimos que los puntos más alto y más bajo de la elipse son:

$$\boxed{\text{Más bajo: } \left(\frac{4}{13}, -\frac{3}{13}, \frac{5}{13}\right)} \qquad \boxed{\text{Más alto: } \left(-\frac{4}{3}, 1, \frac{5}{3}\right)}$$

Por tanto, la altura mínima es $z = \frac{5}{13}$ y la máxima es $z = \frac{5}{3}$.

Problema 3

Evalúe la siguiente integral doble:

$$I = \iint_R (x^2 + y^2)\, dA,$$

donde la región R está definida por el rectángulo

$$R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2,\ 1 \leq y \leq 3\}.$$

Respuesta

Como la región R es rectangular, podemos escribir la integral como un producto iterado:

$$I = \int_{x=0}^{2} \int_{y=1}^{3} (x^2 + y^2)\, dy\, dx.$$

Primero, integramos respecto de y:

$$\int_{y=1}^{3} (x^2 + y^2)\, dy = x^2(y)\Big|_1^3 + \frac{y^3}{3}\Big|_1^3 = 2x^2 + \frac{26}{3}.$$

Ahora integramos respecto de x:

$$I = \int_0^2 \left(2x^2 + \frac{26}{3}\right) dx = 2\int_0^2 x^2\, dx + \frac{26}{3}\int_0^2 dx.$$

Calculamos cada término:

$$2\int_0^2 x^2\, dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{16}{3}, \qquad \frac{26}{3}\int_0^2 dx = \frac{26}{3}(2) = \frac{52}{3}.$$

Por lo tanto,

$$I = \frac{16}{3} + \frac{52}{3} = \frac{68}{3}.$$

$$I = \frac{68}{3}$$

Problema 4 ($\star$)

Sea A una matriz simétrica no nula de 3×3. Considere la función $f(\vec{x}) = \dfrac{1}{2}(A\vec{x})\cdot\vec{x}$

a) Calcule ∇f.

b) Considere la restricción de f a la esfera unitaria $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ en $\mathbb{R}^3$. Suponga que f tiene un máximo y un mínimo en S. Muestre que debe haber un $\vec{x} \in S$ y un $\lambda \neq 0$ tales que $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$.

Respuesta

a) Consideremos el diferencial de f en la dirección $d\vec{x}$:

$$df = \frac{1}{2}\, d\big(\vec{x}^T A\vec{x}\big) = \frac{1}{2}\Big((d\vec{x})^T A\vec{x} + \vec{x}^T A\, d\vec{x}\Big)$$

Usando que los escalares son invariantes por transposición, tenemos que: $(d\vec{x})^T A\vec{x} = \vec{x}^T A^T d\vec{x}$. Luego:

$$df \;=\; \tfrac{1}{2}\,\vec{x}^T(A^T + A)\,d\vec{x} \;=\; \Big(\tfrac{1}{2}(A + A^T)\,\vec{x}\Big)^T d\vec{x}$$

Por definición de gradiente, $df = \big(\nabla f(\vec{x})\big)^T d\vec{x}$ para todo $d\vec{x}$, luego

$$\nabla f(\vec{x}) = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right)\vec{x}$$

Como A es simétrica ($A = A^T$), concluimos

$$\nabla f(\vec{x}) = A\vec{x}$$

b) Restringimos f a la esfera unitaria

$$S = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;:\; \|\vec{x}\|^2 = 1\}$$

Como S es compacta y f es continua, $f|_S$ (f restringida a S) alcanza un máximo y un mínimo en puntos $\vec{x}_{\max}, \vec{x}_{\min} \in S$. Aplicamos multiplicadores de Lagrange a la restricción $g(\vec{x}) = \|\vec{x}\|^2 - 1 = 0$. Se tiene

$$\nabla f(\vec{x}) = \mu\,\nabla g(\vec{x}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad A\vec{x} = \mu\,(2\vec{x})$$

Definiendo $\lambda := 2\mu$, obtenemos la ecuación de valores propios

$$A\vec{x} = \lambda\,\vec{x}, \qquad \|\vec{x}\| = 1$$

Es decir, todo punto crítico de f sobre S es un vector propio unitario de A, y el correspondiente valor de f allí es

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{2}\vec{x}^T A\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{x}^T(\lambda\vec{x}) = \frac{1}{2}\lambda = \mu$$

Resta mostrar que *alguno* de estos valores propios es no nulo. Procedemos por contradicción: supongamos que los valores extremos (máximo y mínimo) de $f|_S$ son ambos 0. Entonces $f(\vec{x}) = 0$ para todo $\vec{x} \in S$, esto es,

$$\vec{x}^T A\vec{x} = 0 \qquad \forall\, \vec{x} \in S$$

Por homogeneidad de grado 2 de la forma cuadrática $\vec{x} \mapsto \vec{x}^T A\vec{x}$, esto implica $\vec{x}^T A\vec{x} = 0$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$. Como A es simétrica, de $\vec{x}^T A\vec{x} = 0$ para todo $\vec{x}$ se deduce $A = 0$, contradiciendo la hipótesis de que A no es nula.

Para ver la deducción: tomando $\vec{x} = e_i$ (la i-ésima base canónica) se obtiene $a_{ii} = 0$ para todo i; tomando $\vec{x} = e_i + e_j$ con $i \neq j$ se obtiene $0 = (e_i + e_j)^T A(e_i + e_j) = 2a_{ij}$, luego $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Así $A = 0$.

Por lo tanto, al menos uno de los extremos de $f|_S$ satisface

$$A\vec{x} = \lambda\,\vec{x} \quad \text{con} \quad \lambda \neq 0$$

Problema 5 (Propuestos)

a) Si la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ debe encerrar al círculo $x^2 + y^2 = 2y$, ¿qué valores de a y b minimizan el área de la elipse?

b) Considere la función $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) := \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 2y & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Calcule, si es que existe, $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dy \right) dx$.

Respuesta

a) Sea la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ que debe encerrar al círculo $x^2 + y^2 = 2y \iff x^2 + (y-1)^2 = 1$. El círculo tiene centro en $(0,1)$ y radio 1. Como la elipse está centrada en el origen y debe *encerrar* el círculo, ambas curvas se tocarán en un único punto (tangencia). El área de la elipse es $A(a,b) = \pi ab$, y queremos minimizarla.

En el punto de tangencia, los valores de x e y satisfacen ambas ecuaciones:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad x^2 + y^2 = 2y$$

De la ecuación de la elipse se despeja:

$$x^2 = a^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right) = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2)$$

Sustituyendo en la ecuación del círculo:

$$\frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2) + y^2 - 2y = 0$$

Simplificando:

$$\left(\frac{b^2 - a^2}{b^2} \right) y^2 - 2y + a^2 = 0$$

Para que la elipse y el círculo se toquen en un único punto, esta ecuación cuadrática en y debe tener una única solución. Por lo tanto, el discriminante debe ser cero:

$$(-2)^2 - 4 \left(\frac{b^2 - a^2}{b^2} \right) a^2 = 0$$

De aquí se obtiene

$$4 - 4a^2\frac{b^2 - a^2}{b^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad b^2 - a^2b^2 + a^4 = 0$$

Así, la condición de tangencia se puede escribir como

$$g(a, b) = b^2 - a^2b^2 + a^4 = 0$$

Ahora, queremos minimizar $A(a, b) = \pi ab$ sujeto a la restricción $g(a, b) = 0$. Usamos multiplicadores de Lagrange:

$$\left.\begin{array}{c} \nabla A = \lambda \nabla g \\ g = 0 \end{array}\right\}$$

Calculamos las derivadas parciales:

$$\nabla A = \begin{bmatrix} \pi b \\ \pi a \end{bmatrix} \qquad \nabla g = \begin{bmatrix} -2ab^2 + 4a^3 \\ 2b - 2a^2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a(2a^2 - b^2) \\ 2b(1 - a^2) \end{bmatrix}$$

El sistema de Lagrange es entonces:

$$\begin{cases} \pi b = \lambda(4a^3 - 2ab^2) \\ \pi a = \lambda(2b - 2ba^2) \\ b^2 - a^2b^2 + a^4 = 0 \end{cases}$$

De la primera y segunda ecuación:

$$\lambda = \frac{\pi b}{2a(2a^2 - b^2)} = \frac{\pi a}{2b(1 - a^2)}$$

Igualando:

$$\frac{\pi b}{2a(2a^2 - b^2)} = \frac{\pi a}{2b(1 - a^2)} \quad \Longrightarrow \quad b^2(1 - a^2) = a^2(2a^2 - b^2)$$

Simplificando:

$$b^2 - a^2b^2 = 2a^4 - a^2b^2 \quad \Longrightarrow \quad b^2 = 2a^4$$

Sustituyendo $b^2 = 2a^4$ en la restricción:

$$b^2 - a^2b^2 + a^4 = 0 \Longrightarrow 2a^4 - a^2(2a^4) + a^4 = 0 \Longrightarrow a^2 = \frac{3}{2} \implies a = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Luego, reemplazando a^2 en la igualdad $b^2 = 2a^4$ tenemos que $b = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

$$\boxed{a = \sqrt{\frac{3}{2}} \qquad b = \frac{3}{\sqrt{2}}}$$

El área mínima correspondiente es

$$A_{\min} = \pi ab = \pi \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\pi\sqrt{3}}{2}$$

b) Para x fijo,

$$\int_0^1 f(x,y)\,dy = \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 1\,dy = 1, & x \in \mathbb{Q} \\ \displaystyle\int_0^1 2y\,dy = \left[y^2\right]_0^1 = 1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Por lo tanto, $\displaystyle\int_0^1 f(x,y)\,dy = 1$ para todo $x \in [0,1]$, y

$$\int_0^1 \Big(\int_0^1 f(x,y)\,dy \Big)\,dx = \int_0^1 1\,dx = 1$$