PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
MAT1620 - CÁLCULO II - SECCIÓN 12
PROF.: WOLFGANG RIVERA DE VERA (wcrivera@mat.puc.cl)
AYUD.: ALFONSO PIÑA ABARCA (aapina@uc.cl)

AYUDANTÍA Nº5

INTEGRALES IMPROPIAS, SUCESIONES, SERIES.

Jueves 11 de septiembre de 2014

Problema 1. Calcule el valor de la siguiente integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x$$

Solución: Como ambos extremos de la integral son infinitos, procedemos a separar la integral en 2. Así,

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x}_{I} = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x}_{I_1} + \underbrace{\int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x}_{I_2}$$

$$I_1 = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{1}{(x+1)^2+2^2}\,dx$$

¿a qué se parece? Sabemos que $\left(\tan^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{x^2+1}$

$$I_1 = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{dx}{4\left(\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1\right)} = \frac{1}{4}\lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}\,dx$$

sea $u = \frac{x+1}{2}$ $\quad x\to 0 \quad u\to \frac{1}{2}$

$du = \frac{1}{2}dx$ $\quad x\to a \quad u\to \frac{a+1}{2}$

$$I_1 = \frac{1}{4}\lim_{a\to-\infty}\int_{\frac{a+1}{2}}^{1/2}\frac{2}{u^2+1}\,du = \frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\tan^{-1}(u)\Big|_{\frac{a+1}{2}}^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left(\tan^{-1}(1/2) - \underbrace{\tan^{-1}\left(\frac{a+1}{2}\right)}_{\lim = -\pi/2}\right) = \frac{1}{2}\left(\tan^{-1}(1/2) + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\left(\tan^{-1}(1/2) + \frac{\pi}{2}\right)$$

Ahora con I_2:

$$I_2 = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{1}{(x+1)^2+2^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}\,dx$$

Sea $u = \frac{x+1}{2}$ $\quad x\to 0 \quad u\to 1/2$

$du = \frac{1}{2}dx$ $\quad x\to b \quad u\to \frac{b+1}{2}$

$$I_2 = \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\int_{1/2}^{\frac{b+1}{2}}\frac{1}{u^2+1}\,du = \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\tan^{-1}(u)\Big|_{1/2}^{\frac{b+1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left(\underbrace{\tan^{-1}\left(\frac{b+1}{2}\right)}_{\lim = \frac{\pi}{2}} - \tan^{-1}(1/2)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(1/2)\right)$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(1/2)\right)$$

$$I = I_1 + I_2 = \frac{1}{2}\left(\tan^{-1}(1/2) + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(1/2)\right) = \pi/2$$

$$\boxed{I = \pi/2}$$

$\therefore$ La integral converge

Problema 2. Estudie la convergencia de las siguientes integrales:

a) $\int_1^\infty \left[1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]^r \, \mathrm{d}x$.

b) $\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x\sqrt{2x+3}} \, \mathrm{d}x$.

Solución: Para la integral del **ejercicio (a)**, consideremos la función $\frac{1}{2x^2}$ cuya integral entre 1 e ∞ converge. ¿Por qué esta? Fíjese en el siguiente límite:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left[1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]}{\frac{1}{2x^2}} = 2 \lim_{x\to\infty} \frac{\left[1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]}{\frac{1}{x^2}} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$$

Luego, como el límite es una constante $\in (0,\infty)$, la integral $\left[1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]$ se comporta de manera similar a la integral $\frac{1}{2x^2}$ en el límite. Así, la integral del ejercicio converge si y sólo si la siguiente integral converge:

$$\int_1^\infty \left[\frac{1}{2x^2}\right]^r \mathrm{d}x$$

Esta integral converge solamente si $2r > 1$ (criterio p). Entonces, la integral en cuestión converge para valores de $r > \frac{1}{2}$.

Para la integral del **ejercicio (c)**, note que el integrando presenta una discontinuidad en el punto $x = -\frac{3}{2}$. Sin embargo, este no afecta ya que se encuentra fuera del intervalo de integración, por lo que la integral es impropia de tipo 1. Ahora, notemos que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^y} = 0 \qquad \text{para cualquier valor de} \quad y > 0$$

Démonos como caso particular el valor de $y = \frac{1}{4}$. Se puede deducir que $\frac{\ln(x)}{x^{1/4}}$ está acotada para todo $x \in [1,\infty)$. Esto se puede escribir como:

$$0 \le \frac{\ln(x)}{x^{1/4}} \le C \qquad\qquad x \ge 1$$

Luego, para todo $x \ge 1$ se tiene que:

$$0 \le \frac{\ln(x)}{x\sqrt{2x+3}} = \frac{\ln(x)}{x^{1/4}} \cdot \frac{1}{x^{3/4}\sqrt{2x+3}} \le \frac{C}{x^{3/4}\sqrt{2x+3}} \le \frac{C}{x^{5/4}}$$

Observe que como la integral $\int_1^\infty \frac{1}{x^{5/4}}\mathrm{d}x$ converge (por ser del tipo p), entonces, por Teorema de Comparación, la integral $\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x\sqrt{2x+3}} \, \mathrm{d}x$ también converge.

Problema 3. Sea $x \in \mathbb{R}$ cualquiera. Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

Solución: Consideremos el teorema siguiente:

Teorema. Sea a_n una sucesión y $f(z)$ una función continua. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = x$ y $\lim_{z\to x} f(z) = L$, entonces $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = L$.

Usando el teorema anterior y definiendo a $f(z) = e^z$ y a $a_n = \ln\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right]$ con x un número fijo y real cualquiera, lo que se pide es equivalente a demostrar que:

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right] = x$$

Ahora bien,

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right] = \lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) = x\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} = x\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}$$

Observe que se reutilizó el teorema, aplicado esta vez a una función $g(y) = \frac{\ln(1+y)}{y}$ y a la sucesión $b_n = \frac{x}{n}$. Finalmente, para calcular el límite, usamos el teorema de L'Hôpital,

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right] = x\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y} = x\lim_{y\to 0}\frac{\frac{1}{(1+y)}}{1} = x\cdot 1 = x$$

Finalmente, ya que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \ln\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right] = x$$

y,

$$\lim_{z\to x} f(z) = \lim_{z\to x} e^z = e^x$$

entonces,

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} e^{\ln\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right]} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

Y así entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

□

Problema 4. Sea f una función continua. Sea $a_1 = a$, $a_2 = f(a)$, $a_3 = f(a_2) = f(f(a))$, ..., $a_{n+1} = f(a_n)$. Demuestre que si $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ se tiene $f(L) = L$.

Solución: Usando el mismo teorema que en el Problema 3, si $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{x\to L} f(x)$$

Luego, ya que f es una función continua:

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{x\to L} f(x) = f(L)$$

Por lo tanto,

$$L = f(L)$$

□

Problema 5. Sea a_n dada por $a_1 = 6$, $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$. Demuestre que $\{a_n\}$ converge y encuentre el valor del límite.

Solución: Si evaluamos el término a_2 y luego el a_3 y luego a_4, notamos que la sucesión puede ser decreciente, lo cual hay que demostrar. Ahora bien, consideremos el teorema siguiente:

Teorema. Si una sucesión $\{a_n\}$ es decreciente y acotada, entonces ella tiene un límite.

Luego, para demostrar que a_n converge y tiene límite, debemos comprobar que $\{a_n\}$ es decreciente y acotada. Para demostrar que es decreciente, se debe cumplir que $a_{n+1} < a_n$, para todo valor de n. Esto es $\sqrt{6 + a_n} < a_n$.

Lo que es equivalente a, $6 + a_n < a_n^2$. Donde se obtiene que (considerar que a_n es una sucesión de términos positivos): $(a_n - 3)(a_n + 2) > 0$.

La expresión anterior se cumple cuando $a_n < -2$ y $a_n > 3$. Como $a_n > 0$, se tiene que la sucesión es decreciente si $a_n > 3$ para todo valor de n. Demostremos esto.

Por inducción se tiene que:

- **Para** $n = 1$ **:** $a_1 = 6 > 3$. Luego es cierto para $n = 1$.
- **Para** $n = n$ **:** Supongamos que $a_n > 3$. Entonces,
- **Para** $n + 1$ **:** $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} > \sqrt{6 + 3} = \sqrt{9} = 3$. Luego también es cierto para $n + 1$.

De esta forma se concluye que la sucesión a_n es convergente y tiene un límite L (ya que es decreciente y acotada). Ahora bien, como $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = L$ y la función raíz cuadrada $f(z) = \sqrt{z}$ es continua, entonces:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{6 + a_n} = \lim_{n\to\infty} f(6 + a_n) \\ &= f\left(\lim_{n\to\infty} (6 + a_n)\right) = \sqrt{6 + L} \end{aligned}$$

Esto nos lleva a:

$$L = \sqrt{6 + L}$$

Ecuación que nos entrega como soluciones a $L = -2$ y $L = 3$. Sin embargo, $a_n > 3$ $\forall n$, luego:

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n = 3$$

□

Problema 6. Sea $a_n = 2^{-n}$ si n es par, $a_n = 3^{-n}$ si n es impar. Calcule $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Solución: Se tiene la sucesión a_n definida por tramos como:

$$a_n = \begin{cases} 2^{-n} & \text{si } n \text{ es par,} \\ 3^{-n} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Nos piden $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, por lo que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{IMPARES} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{PARES}$$

Sabemos, además, que un número par es definido por $2k$ y un número impar es definido por $2k-1$, para valores de k enteros. Luego se tiene que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} 3^{-[2k-1]} + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-2k}$$

Reordenando,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} 3 \cdot 9^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} 4^{-k}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} 3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k$$

Considere lo siguiente:

Fórmula. Sea la suma geométrica $S = \sum_{i=0}^{n} ar^i$, donde a es un coeficiente real cualquiera y r es la razón de la suma geométrica. El valor de la suma está dado por:

$$S = \frac{a\left(1 - r^{n+1}\right)}{1 - r}$$

Fórmula. Sea la suma geométrica $S = \sum_{i=1}^{n} ar^i$, donde a es un coeficiente real cualquiera y r es la razón de la suma geométrica. El valor de la suma está dado por:

$$S = \frac{ar\left(1 - r^{n}\right)}{1 - r}$$

Fórmula. Observe que de forma general la suma se obtiene como:

$$S = \frac{[\texttt{PRIMER TÉRMINO}]\left(1 - r^{[\texttt{N° DE TÉRMINOS}]}\right)}{1 - r}$$

Fórmula. En una serie, el número de términos de la suma tiende a infinito, por lo que el valor de una serie geométrica es:

$$S = \frac{[\texttt{PRIMER TÉRMINO}]}{1 - r}$$

Usando lo anterior:

$$\begin{aligned} S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \sum_{k=1}^{\infty} 3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{3 \cdot \frac{1}{9}}{1 - \frac{1}{9}} + \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} \\ &= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{8}{9}} + \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{3}{8} + \frac{1}{3} = \frac{17}{24} \end{aligned}$$

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{17}{24}$$

Problema 7. Se sabe que $e = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Demuestre que lo siguiente converge a e.

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ...$$

Solución: Llamemos $t_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

En primer lugar, tratemos de desarrollar el binomio de Newton. Para ello considere lo siguiente:

Teorema del Binomio.

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^{n-k}y^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} x^{n-k}y^k$$

Usando lo anterior,

$$\begin{aligned} t_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\ &= 1 + n\cdot 1\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot 1\cdot\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 1}{n!}\cdot 1\cdot\frac{1}{n^n} \\ &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \end{aligned}$$

Veamos que para cada $m \in \mathbb{N}$ fijo y para cada $n > m$ se tiene que:

$$\begin{aligned} t_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\ &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \\ &> 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right) \end{aligned}$$

Es decir,

$$t_n > 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)$$

Obteniendo el límite a ambos lados cuando $n \to \infty$ (observe que en el lado derecho se tiene una cantidad **fija** $m+1$ de términos):

$$\lim_{n\to\infty} t_n > \lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\right]$$

Lo que conduce a,

$$e \geq 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{m!}$$

Lo anterior se cumple para todo $m \in \mathbb{N}$. Luego definamos la sucesión $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como:

$$s_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

Luego, se concluye que s_n es acotada por arriba por e. También se tiene que s_n es creciente por ser la sucesión de sumas de términos positivos. De esta forma, se concluye que $\lim_{n\to\infty} s_n$ existe (en otras palabras, la serie converge) y ese límite es menor o igual que e.

Ya se sabe que s_n está acotada por arriba y sabemos que converge. Veamos qué pasa "por abajo". Así se tiene que:

$$\begin{aligned} t_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\ &= 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)}_{<1}+\frac{1}{3!}\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)}_{<1}\underbrace{\left(1-\frac{2}{n}\right)}_{<1}+\cdots+\frac{1}{n!}\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)}_{<1}\underbrace{\left(1-\frac{2}{n}\right)}_{<1}\cdots\underbrace{\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}_{<1} \\ &\leq s_n \quad \forall n \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\lim_{n\to\infty} t_n = e \leq \lim_{n\to\infty} s_n$$

Finalmente, se tiene que s_n está acotada por arriba y por abajo por el mismo número. Así se concluye que $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$ converge a e.

□

Problema 8. Sea $g : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ continua y creciente en el intervalo $[0,1]$, con $g(0) = 0$. Pruebe que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} g(\frac{1}{n})$ converge si y sólo si la integral $\int_0^1 \frac{g(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ converge.

Solución: Fíjese que el término general de la serie es $g(\frac{1}{n})$ el que cuando $n \to \infty$ se tiene que $g(\frac{1}{n}) \to 0$ ya que $g(0) = 0$.

Para resolver el problema, hagamos la siguiente sustitución:

$$\frac{1}{x} = u \qquad \text{lo que implica que} \qquad -\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$$

Luego, sustituyendo se obtiene lo siguiente:

$$\int_0^1 \frac{g(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\int_\infty^1 g\left(\frac{1}{u}\right)\,\mathrm{d}u = \int_1^\infty g\left(\frac{1}{u}\right)\,\mathrm{d}u$$

Ya que g es creciente se tiene que $g'(x) \geq 0$ para todo $x \in [0,1]$. ¿Pero qué ocurre con $g(\frac{1}{u})$? Veamos.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} g\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{1}{u^2} g'\left(\frac{1}{u}\right) \leq 0$$

Lo anterior nos dice que $g(\frac{1}{u})$ es monótona decreciente. Ahora, como enunciamos al principio y ya que g es continua,

$$\lim_{u\to\infty} g\left(\frac{1}{u}\right) = g\left(\lim_{u\to\infty} \frac{1}{u}\right) = g(0) = 0$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} g\left(\frac{1}{n}\right) \ \text{ converge} \quad &\iff \quad \int_1^\infty g\left(\frac{1}{u}\right)\,\mathrm{d}u \ \text{ converge} \\ &\iff \quad \int_0^1 \frac{g(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x \ \text{ converge} \end{aligned}$$