Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
MAT1620 – Cálculo II
Segundo Semestre 2025

# Ayudantía 15

Repaso exámen.

---

**Problema 1**

El *valor promedio* de una función $f(x, y, z)$ sobre una región sólida E se define como

$$f_{\text{prom}} = \frac{1}{V(E)} \iiint_E f(x, y, z)\ dV$$

donde $V(E)$ es el volumen de E.
Encuentre el valor promedio de la función $f(x, y, z) = x^2z + y^2z$ sobre la región encerrada por el paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ y el plano $z = 0$.

**Problema 2**

Encuentre la región E tal que

$$I = \iiint_E (1 - x^2 - 2y^2 - 3z^2)\mathrm{d}V$$

se maximiza. Luego evalúe la integral.

**Problema 3 (cap. 1)**

Determine el valor de $p$ para que la integral

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p}$$

sea convergente.

**Problema 4**

Reescriba la integral triple

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{1-y} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

como una integral triple con el orden de integración $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ y, considerando esto, calcule el volumen de la región

$$R := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 1, \sqrt{x} \le y \le 1, 0 \le z \le 1 - y\}$$

**⋆ Problema 5 (cap. 2)**

Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función con derivadas parciales continuas y $h'(0) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Considérese la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = h(x^3 + 2y^3 - 4x)$$

y la dirección unitaria $\vec{v} = \frac{1}{2}(1, \sqrt{3})$. Demuestre que el conjunto

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : D_{\vec{v}} f(\vec{x}) = 0\right\}$$

es una elipse, donde $D_{\vec{v}} f(x, y)$ denota la derivada direccional de $f$ en $(x, y)$ en la dirección $\vec{v}$.

**Problema 6 (Propuesto)**

Demuestre que

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 - xyz} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}.$$

(Nadie ha sido capaz de hallar el valor exacto de la suma de esta serie.)

Hint: El teorema de Tonelli indica que si $f_n \geq 0$, y es medible (p. ej. $(xyz)^n$), entonces $\int \sum_{n=0}^{\infty} f_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int f_n$.

## Problemas Extra

Los siguientes son problemas recomendados del libro guía (Stewart) para reforzar la materia del capítulo 3.

**Importante:** estos ejercicios son simplemente una recomendación por su variedad de temas, y no tienen relación alguna con los ejercicios que se vayan a evaluar durante el exámen. Su objetivo es únicamente ejercitar los contenidos que no han sido evaluados.

Capítulo 15.2

27. Encuentre el volumen del sólido que está debajo del paraboloide elíptico

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z = 1$$

y arriba del rectángulo $R = [-1, 1] \times [-2, 2]$.

37. Use simetría para calcular $\displaystyle\iint_R \frac{xy}{1 + x^4} \, dA, \qquad R = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$

Capítulo 15.3

49. $\displaystyle\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} \, dx \, dy$. Calcule la integral invirtiendo el orden de integración.

53. $\displaystyle\int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{1 + \cos^2 x} \, dx \, dy$

62. Al evaluar una integral doble sobre una región $D$, se obtuvo una suma de integrales iteradas como sigue:

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_0^1 \int_0^{2y} f(x,y)\,dx\,dy + \int_1^3 \int_0^{3-y} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Bosqueje la región $D$ y exprese la integral doble como una integral iterada con orden inverso de integración.

Capítulo 15.4

15. Calcule el área de un pétalo de la rosa $r = \cos 3\theta$.
18. Calcule el área de la región dentro del cardioide $r = 1 + \cos\theta$ y fuera de la circunferencia $r = 3\cos\theta$.
20. Calcule el volumen bajo el paraboloide $z = 18 - 2x^2 - 2y^2$ y arriba del plano $xy$.
22. Calcule el volumen dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ y fuera del cilindro $x^2 + y^2 = 4$.
25. Calcule el volumen arriba del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y bajo la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
39. Utilice coordenadas polares para combinar la suma

$$\int_{1/\sqrt{2}}^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^x xy\,dy\,dx \;+\; \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^x xy\,dy\,dx \;+\; \int_{\sqrt{2}}^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} xy\,dy\,dx$$

dentro de una integral doble. Después evalúe la doble integral.

Capítulo 15.8

24. Encuentre el volumen del sólido que está entre el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.
25. Encuentre el volumen de la región $E$ acotada por los paraboloides $z = x^2 + y^2$ y $z = 36 - 3x^2 - 3y^2$.

Capítulo 15.9

26. Evalúe $\iiint_E xyz\,dV$, donde $E$ está entre las esferas $\rho = 2$ y $\rho = 4$ y arriba del cono $\phi = \pi/3$.
30. Encuentre el volumen de la parte de la esfera $\rho \le a$ que está entre los conos $\phi = \pi/6$ y $\phi = \pi/3$.
46. Demuestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\; e^{-(x^2+y^2+z^2)}\,dx\,dy\,dz = 2\pi.$$

Capítulo 15.10

19. $\iint_R xy\,dA$, donde $R$ es la región en el primer cuadrante acotada por las rectas $y = x$ y $y = 3x$ y las hipérbolas $xy = 1$, $xy = 3$; $x = u/v,\ y = v$.
25. Evalúe usando cambio de variables la integral

$$\iint_R \cos\left(\frac{y-x}{y+x}\right)\,dA,$$

donde $R$ es la región trapezoidal con vértices $(1,0)$, $(2,0)$, $(0,2)$ y $(0,1)$.

28. Sea $f$ continua sobre $[0,1]$ y sea $R$ la región triangular con vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$. Demuestre que

$$\iint_R f(x+y)\,dA = \int_0^1 u\,f(u)\,du.$$