1. a) Aplicamos el criterio del cociente con

$$a_k = \frac{(-4)^k (x+1)^k}{\sqrt{2k+1}}$$

Resolvemos el límite

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{4^{k+1}|x+1|^{k+1}}{\sqrt{2k+3}} \cdot \frac{\sqrt{2k+1}}{4^k |x+1|^k}$$

$$= 4|x+1| \cdot \lim_{k\to\infty} \sqrt{\frac{2k+1}{2k+3}}$$

$$= 4|x+1| < 1$$

aplicamos la condición de convergencia del criterio del cociente

$$\Rightarrow |x+1| < \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{4} < x+1 < \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{-5}{4} < x < \frac{-3}{4}$$

Obtenemos que el radio de convergencia es $\frac{1}{4}$ y que el intervalo de convergencia va desde $\frac{-5}{4}$ hasta $-3/4$. Comprobemos convergencia en los bordes

$x = -5/4$

$$a_k = \frac{(-4)^k (-1/4)^k}{\sqrt{2k+3}} = \frac{1}{\sqrt{2k+3}}$$

En este caso $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge por criterio p

$x = -3/4$

$$a_k = \frac{(-4)^k (1/4)^k}{\sqrt{2k+3}} = \frac{(-1)^k}{\sqrt{2k+3}}$$

En este caso converge por criterio de la serie alternante.

Concluimos que $R = \frac{1}{4}$, $I = (\frac{-5}{4}, \frac{-3}{4}]$

1. b) Aplicamos criterio de la raiz con

$$a_k = \frac{k^2(x-3)^k}{2^{k-1}}$$

Calculamos el limite

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k^2|x-3|^k}{2^{k-1}} \right)^{1/k}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{k^{2/k}}{2^{\frac{k-1}{k}}} \cdot |x-3|$$

$$= |x-3| \lim_{k\to\infty} \frac{(k^{1/k})^2}{2 \cdot 2^{-1/k}}$$

$$= \frac{|x-3|}{2} \cdot \left(\lim_{k\to\infty} k^{\frac{1}{k}} \right)^2 \cdot \lim_{k\to\infty} 2^{1/k}$$

($\lim_{k\to\infty} k^{\frac{1}{k}} \to 1$, $\lim_{k\to\infty} 2^{1/k} \to 1$)

$$= \frac{|x-3|}{2} < 1$$

$$\Rightarrow |x-3| < 2$$

$$\Rightarrow 1 < x < 5$$

Sabemos que $R = 2$, y que el intervalo va desde 1 a 5, veamos los extremos

$x = 1$)

$$a_k = \frac{k^2(-2)^k}{2^{k-1}} = (-1)^k \cdot 2k^2$$

Diverge por criterio de serie alternante

$x = 5$)

$$a_k = \frac{k^2(2)^k}{2^{k-1}} = 2k^2$$

Diverge por criterio de divergencia ($\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0$)

Concluimos que $R = 2$, $I = (1, 5)$

1. c) Aplicamos criterio del cociente con

$$a_k = k!\,(2x-1)^k$$

Resolvemos el limite

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)!\,|2x-1|^{k+1}}{k!\,|2x-1|^k}$$

$$= \lim_{k\to\infty} (k+1)\,|2x-1| < 1$$

Como $\lim_{k\to\infty} (k+1) = \infty$, necesariamente

$$|2x-1| = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}$$

Concluimos que $R = 0$, $I = \{\frac{1}{2}\}$

2) Al ser el radio 3, sabemos que

$$|x+2| < 3$$

$$\Rightarrow -5 < x < 1$$

luego el intervalo va de -5 a 1, comprobemos los extremos

$x = -5$

$$a_k = \frac{(-3)^k}{3^k k} = \frac{(-1)^k}{k}$$

Converge por criterio de la serie alternante

$x = 1$

$$a_k = \frac{3^k}{3^k k} = \frac{1}{k}$$

Diverge por criterio p

Concluimos que $I = (-5, 1)$

3) Notamos que el intervalo esta centrado en -3, luego como converge en -6 sabemos que esta contenido en el intervalo, como minimo -6 esta en el borde, luego

$$R_{min} = |(-6)-(-3)|$$
$$= |-6+3|$$
$$= 3.$$

De manera similar, como diverge en 1, este no puede estar contenido, como maximo 1 esta en el borde, luego

$$R_{max} = |1-(-3)|$$
$$= |1+3|$$
$$= 4$$

4) Notamos que la serie esta centrada en 0, por lo que sabemos que

$$-R < x < R$$

Reescribiendo la segunda serie tenemos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x^2)^k$$

Luego sabemos que para que converga

$$-R < x^2 < R$$
$$\Rightarrow 0 < x^2 < R$$ (x^2 siempre positivo)
$$\Rightarrow -\sqrt{R} < x < \sqrt{R}$$

Concluimos que el radio de convergencia de la segunda serie es $\sqrt{R}$.