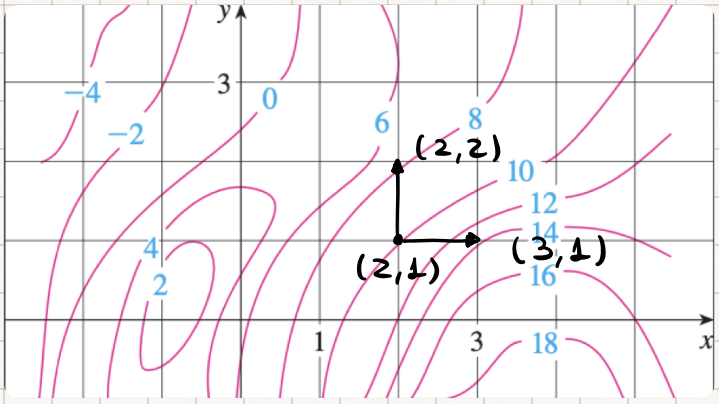
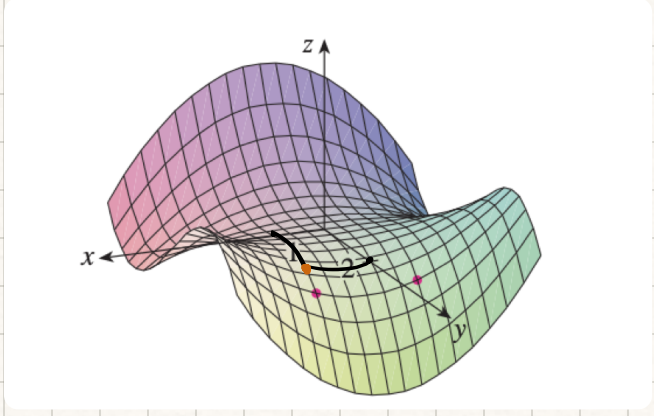
1) Podemos estimar las derivadas a través del cambio en una unidad, esta ya que es la información que nos brinda la ilustración



$$f_x(2,1) \approx \frac{f(2+\Delta x,1)-f(2,1)}{\Delta x} = f(3,1)-f(2,1) = 14-10 = 4$$

$$f_y(2,1) \approx \frac{f(2,1+\Delta y)-f(2,1)}{\Delta y} = f(2,2)-f(2,1) = 8-10 = -2$$

2) Para ver el signo de las derivadas de (1,2), vemos si "subimos" o "bajamos" si nos movemos en esa dirección. Notamos que si nos movemos en dirección x positiva desde (1,2) subimos, mientras que bajamos si es que nos movemos en dirección y positiva



Concluimos entonces que $f_x(1,2) > 0$ y $f_y(1,2) < 0$.

3. a) $f(x,y) = y^2 - 4xy^3 + 2$

- $f_x(x,y) = -4y^3$
- $f_y(x,y) = 2y - 12xy^2$

3. b) $f(x,y) = x^3 e^{xy^2}$

- $f_x(x,y) = 3x^2 e^{xy^2} + x^3 y^2 e^{xy^2}$
  $= e^{xy^2}(3x^2 + x^3y^2)$
- $f_y(x,y) = x^3 e^{xy^2} \cdot 2xy = 2x^4 y e^{xy^2}$

3. c) $f(r,\theta) = \operatorname{sen}(r\cos\theta)$

- $f_r(r,\theta) = \cos\theta \cdot \cos(r\cos\theta)$
- $f_\theta(r,\theta) = \cos(r\cos\theta) \cdot -r\operatorname{sen}\theta$
  $= -r\operatorname{sen}\theta \cdot \cos(r\cos\theta)$

3. d) $f(x,y) = \int_x^y \sqrt{t^3 + 1}\, dt$

- $f_x(x,y) = -\sqrt{x^3 + 1}$
- $f_y(x,y) = \sqrt{y^3 + 1}$

3.g) $f(x,y,z) = \ln(x + 2y + 3z)$

- $f_x(x,y,z) = \dfrac{1}{x + 2y + 3z}$
- $f_y(x,y,z) = \dfrac{2}{x + 2y + 3z}$
- $f_z(x,y,z) = \dfrac{3}{x + 2y + 3z}$

3.h) $f(x,y) = x^y = e^{y\ln(x)}$

- $f_x(x,y) = y x^{y-1}$
- $f_y(x,y) = \ln(x) e^{y\ln(x)} = \ln(x) x^y$

4) Utilizamos la definición de derivada

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

luego

$$f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{h^3}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

5.a) Derivamos directamente utilizando la regla del cuociente

$$f_x(x,y) = \frac{\frac{\partial}{\partial x}(x^3y - xy^3)\cdot(x^2+y^2) - \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)\cdot(x^3y - xy^3)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{(3x^2y - y^3)(x^2+y^2) - (2x)(x^3y - xy^3)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y(x,y) = \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)}$$

5.b) Para esto utilizaremos la definición de derivada. (corrección de enunciado, $f(0,0) = 0$).

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{0/h^2 - 0}{h}$$

$$= 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{0/h^2 - 0}{h}$$

$$= 0$$