Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
MAT1620 – Cálculo 2
Segundo Semestre del 2025

Ayudantía 13

Coordenadas polares e integrales triples

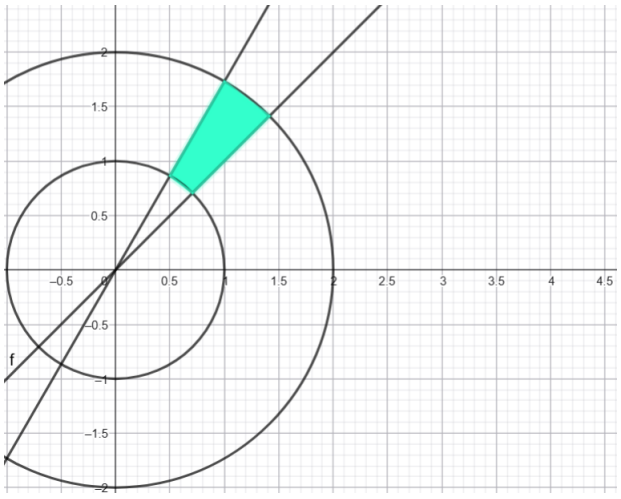
Problema 1

Calcule las siguientes integrales dobles:

1. $\iint_R \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\, dA$. Donde R es la región delimitada por $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$, $y=x$ e $y=\sqrt{3}x$ en el primer cuadrante.
2. $\iint_R \sqrt{a^2-x^2-y^2}\, dA$. Donde R es el círculo delimitado por $x^2+y^2=a^2$.

Respuesta:

1. Notemos primero que la región se ve de la siguiente forma:



Recordando que $\tan(\theta)$ es la pendiente de una recta que pasa el origen (donde θ es el ángulo formado por la recta y el eje x). Entonces el ángulo entre la recta $y=\sqrt{3}x$ y el eje x es $\frac{\pi}{3}$. El

ángulo que forma la recta $y = x$ y el eje x es $\frac{\pi}{4}$. Entonces la región en coordenadas polares es $R = \{1 < r < 2,\ \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{3}\}$. Entonces la integral en polares queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\iint_R \arctan\left(\frac{y}{x}\right) dA &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \int_1^2 r \arctan\left(\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}\right) dr d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \int_1^2 r \arctan\left(\tan\theta\right) dr d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \int_1^2 r\theta dr d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \theta d\theta \cdot \int_1^2 r dr \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{9} - \frac{\pi^2}{16}\right) \cdot \frac{3}{2} = \frac{7\pi^2}{192}
\end{aligned}$$

2. La región en coordenadas polares es de la siguiente forma $R = \{0 < r < a,\ 0 < \theta < 2\pi\}$:

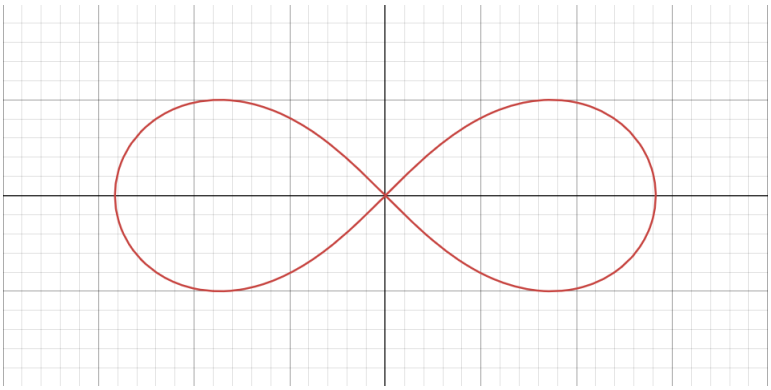
$$\begin{aligned}
\iint_R \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dA &= \int_0^{2\pi} \int_0^a r\sqrt{a^2 - r^2} dr d\theta \\
&= 2\pi \int_0^a r\sqrt{a^2 - r^2} dr \\
&= \pi \int_0^{a^2} \sqrt{u} du = \frac{2\pi}{3} a^3
\end{aligned}$$

Problema 2

La curva cuya ecuación es

$$\left(x^2+y^2\right)^2 = 2a^2\left(x^2-y^2\right)$$

se llama lemniscata de Bernoulli, tiene el siguiente aspecto gráfico:



Calcule el área de la lemniscata de Bernoulli.

Respuesta:

La ecuación en coordenadas polares se ve de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} r^4 &= 2a^2r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \\ r^2 &= 2a^2\cos 2\theta \\ r &= a\sqrt{2\cos 2\theta} \end{aligned}$$

Notar que esta forma nos da restricciones respecto al ángulo θ, se necesita que $\cos 2\theta \geq 0$, esto se cumple en los intervalos $[0, \pi/4]$, $[3\pi/4, 5\pi/4]$ y $[7\pi/4, 2\pi]$. Por la simetría de la figura, calculamos solo en el primer cuadrante y multiplicamos por 4:

$$\begin{aligned} \iint_R dA &= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} r\,dr\,d\theta \\ &= 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\, d\theta \\ &= 4a^2\frac{\sin 2\theta}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2a^2 \end{aligned}$$

Problema 3

Sea R el tetraedro formado por los planos coordenados y el plano $z = 1 - x - y$. Calcular:

$$\iiint_R xyz\ dA$$

Respuesta:

El tetraedro puede ser descrito como $R = \{0 < x < 1,\ 0 < y < 1 - x,\ 0 < z < 1 - x - y\}$:

$$\begin{aligned} I = \iiint_R xyz\ dA &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} xyz\ dzdydx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} xy\frac{(1-x-y)^2}{2} dydx \end{aligned}$$

Hacemos el cambio de variable $u = 1 - x - y$:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^{1-x} x(1-x-u)u^2 dudx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^{1-x} xu^2 - x^2u^2 - xu^3 dudx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x(1-x)^3}{3} - \frac{x^2(1-x)^3}{3} - \frac{x(1-x)^4}{4} dx \end{aligned}$$

Hacemos $t = 1 - x$:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)\frac{t^3}{3} - (1-t)^2\frac{t^3}{3} - (1-t)\frac{t^4}{4} dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)\left(\frac{t^3}{3} - (1-t)\frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4}\right) dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{3} - \frac{t^4}{4}\right) dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t^4}{12} - \frac{t^5}{12} dt \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{t^5}{60} - \frac{t^6}{72}\right)|_0^1 = \frac{1}{720} \end{aligned}$$

Problema 4*

Considere la integral, definida sobre todo el plano $\mathbb{R}^2$,

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dA := \lim_{a\to\infty} \iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}\, dA,$$

donde $D_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2\}$ es el disco cerrado con radio a y centro en el origen. Demuestre que $I = \pi$. Relacione este resultado con la integral gaussiana ($\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$).
Nota: este es un ejemplo de una integral impropia en $\mathbb{R}^2$.

Respuesta

Para integrar la función $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ sobre D_a utilizamos coordenadas polares. Tenemos que

$$x = r\cos(\theta), \qquad y = r\sin(\theta), \qquad dA = r\, d\theta\, dr,$$

por lo que $D_a = \{(r,\theta) : 0 \leq r \leq a,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ y $f(r,\theta) = e^{-r^2}$. Luego,

$$\iint_{D_a} f(x,y)\,dA = \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r\,d\theta\,dr = 2\pi \int_0^a e^{-r^2} r\,dr = -\pi e^{-r^2}\Big|_{r=0}^{r=a} = \pi\big(1 - e^{-a^2}\big).$$

Por lo tanto,

$$I = \lim_{a\to\infty} \iint_{D_a} f(x,y)\,dA = \lim_{a\to\infty} \pi\big(1 - e^{-a^2}\big) = \pi.$$

Para relacionar este resultado con la integral gaussiana, notemos que si $A = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$, entonces se va a cumplir que:

$$A^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy$$

Ya que no importa cómo uno le ponga a las variables, luego juntando ambas integrales queda lo siguiente:

$$A^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dA = I$$

Por lo tanto $A = \sqrt{I} = \sqrt{\pi}$. Es decir, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Problema Propuesto 1

Encuentre la masa y el centro de masa del sólido E con la función de densidad dada por ρ. E esta acotada por el cilindro parabólico $z = 1 - y^2$ y los planos $x + z = 1$, $x = 0$ y $z = 0$; $\rho(x, y, z) = 4$.

Respuesta

Se define la región **E** por las siguientes inecuaciones.

$$\begin{aligned} 0 \leq & z \leq 1 - y^2 \\ 0 \leq & x \leq 1 - z \\ -1 \leq & y \leq 1 \end{aligned}$$

Dada dicha región, se aplica la formula de masa y centro de masa.

$$\begin{aligned} M &= \int\int\int \rho dV \\ M(E) &= \rho \int_{-1}^{1} \int_{0}^{1-y^2} \int_{0}^{1-z} 1 \; dx \; dz \; dy \\ &= \rho \int_{-1}^{1} \int_{0}^{1-y^2} (1 - z) \; dz \; dy \\ &= \rho \int_{-1}^{1} z - \frac{z^2}{2}\Big|_{0}^{1-y^2} dy \\ &= \rho \int_{-1}^{1} 1 - y^2 - \frac{1 - 2y^2 + y^4}{2} dy \\ &= \rho \int_{-1}^{1} \frac{1 - y^4}{2} dy \\ &= \frac{\rho}{2}\left(1 - \frac{1}{5}\right) \\ &= \rho \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CM(x) &= \frac{1}{M}\int\int\int \rho x \; dV = \frac{5}{16}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-y^2}\int_{0}^{1-z} 4x \; dx \; dz \; dy = \frac{5}{14} \\ CM(y) &= \frac{1}{M}\int\int\int \rho y \; dV = \frac{5}{16}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-y^2}\int_{0}^{1-z} 4y \; dx \; dz \; dy = 0 \\ CM(z) &= \frac{1}{M}\int\int\int \rho z \; dV = \frac{5}{16}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-y^2}\int_{0}^{1-z} 4z \; dx \; dz \; dy = \frac{2}{7} \end{aligned}$$

Por tanto, la masa de la sección es 16/5 y su centro de masa es $(5/14, 0, 2/7)$