PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TAV 2022

Ejercicios MAT1620

Integrales Impropias

1. Integrales Impropias

   Sección 7.8: 1,2,7,8,11,18,23,25,26,35,48,52,53,54,55,56,57,58,59,71-80

Sucesiones y Series

1. Sucesiones

   Sección 11.1: 1-3,6,9,11,19,20,24,25,33,42,43,47,52,69,72-82,90-92

2. Series:sumas parciales, convergencia

   Sección 11.2: 1-8,15,17,20,23,27,29,31,39,43,45,46,67,73,74,75,83,84,85,89,90

3. Criterio de la Integral

   Sección 11.3: 1,2,5,6,7,11,12,15,17,18,27,28,30,34,36,43,46

4. Convergencia de Series por Comparación:

   Sección 11.4: 1,2,5,6,7,14,17,19,20,35,36,37,40,41,45,46

5. Convergencia de la serie alternante.

   Sección 11.5: 1,3,11,12,15,17,20,27,28,32

6. Criterio de convergencia absoluta, criterio de la raíz y cuociente

   Sección 11.6: 1,3,5,6,11,12,13,19,22,29,30,31,33,35,36,38,42,45

   Observación: Los ejercicios de la sección 11.7 son una buena forma de repasar los criterios.

7. Series: Intervalo y radio de convergencia

   Sección 11.8: 1,2,4,5,6,7,15,19,21,23,29-33,39,40,41,42

8. Representación de Funciones

   Sección 11.9: 3,5,6,8,9,11,14,13,15,25-27,19,20,21,24,30,34,37,39,42

9. Series de Taylor

   Sección 11.10: 1,2,3,4,5,7,8,9,14,15,16,21,22,24,29,31,33,38,43,51-62

Vectores y el espacio $\mathbb{R}^3$

1. Coordenadas cartesianas en el espacio: $\mathbb{R}^3$
   Sección 12.1: 1,2,3,5,6,7,10,12,13,16,21,23-38,41,42,44
2. Vectores en $\mathbb{R}^3$
   Sección 12.2: 1,2,3,4,7,9,13,19-22,26
3. Producto Punto
   Sección 12.3: 1-10,14-20,23-26,29,30
4. Producto Cruz
   Sección 12.4: 1-7,13,27-36
5. Rectas y planos en $\mathbb{R}^3$
   Sección 12.5: 1-7,10-13,16,19,22,24,26,27,30,37-44,46,51,54,64,65,72

Funciones de Varias Variables

1. Funciones de varias variables
   Sección 14.1: 1,2,9-12,15-19,23-25,32-36,38-44,59-64
2. Límites
   Sección 14.2: 1-4,7,8,13-17,39-41
3. Continuidad
   Sección 14.2: 25,26,29-38,44
4. Derivadas parciales
   Sección 14.3: 1,2,3,4,15-40,45,46
5. Derivadas de Orden Superior
   Sección 14.3: 51-58,63-70,72-78
6. Plano Tangente y Aproximaciones Lineales
   Sección 14.4: 1-6,12,13,17-21
7. Regla de la cadena
   Sección 14.5: 1,3,7,10,13-16,19,21,27-35
8. Derivada Direccional y Gradiente
   Sección 14.6: 1,2,3,4,8-12,21-25,29-34,41-42
9. mínimos y máximos locales y absolutos
   Sección 14.7: 1-4,7,9,10,15-20,29-36,40-42,50,51

10. Multiplicadores de Lagrange
    Sección 14.8: 1,7,8,9,19-22,42-44

Integrales Dobles y Triples

1. Integrales dobles sobre rectángulos
   Sección 15.1: 4-6,11-13,17
2. Integrales Iteradas
   Sección 15.2: 3-24,26,27,37,38
3. Integrales Dobles sobre regiones generales:
   Sección 15.3: 1-10,13-16,18-20,22,24,25,29-32
4. Integrales dobles en coordenadas polares
   Sección 15.4: 7-20,22,24,25,27-32
5. Integrales triples
   Sección 15.7: 3-8,11-14,18,20,21,27-32,34-36
6. Integrales triples en coordenadas Cilíndricas
   Sección 15.8: 18-22,29,30
7. Integrales triples en coordenadas Cilíndricas
   Sección 15.9: 11-15,17,18,22-27,30,39-41
8. Cambio de Variables
   Sección 15.10: 8,9,11-20,23-25

Objetivos e indicadores asociados

1. **Integrales Impropias:**

   Analizar la convergencia de una integral impropia de tipo 1 o tipo 2.

   - Evaluando una integral impropia.
   - Aplicando el Teorema de comparación.

2. **Sucesiones y Series:**

   a) Estudiar la convergencia de una sucesión dada de forma explícita o recursiva.
   - Escribiendo sus primeros términos
   - Calculando su límite usando álgebra de límites y límites conocidos.
   - Acotando y determinando la monotonía de una sucesión.
   - Determinando la convergencia por comparación.
   - Determinando la convergencia por monotonía.

   b) Analizar la convergencia de una serie numérica.
   - Calculando la suma de una serie geométrica.
   - Calculando la suma de una serie telescópica.
   - Aplicando el criterio de la integral.
   - Aplicando pruebas por comparación.
   - Aplicando la prueba de la serie alternante.
   - Reconociendo el concepto de convergencia absoluta y condicional.
   - Aplicando las pruebas de la razón y la raíz.

   c) Comprender las series de potencias en centradas en 0 o un punto a.
   - Determinando el radio de convergencia.
   - Determinando el intervalo de convergencia.
   - Determinando si una serie de potencias es convergente en algún punto a partir de su radio e intervalo de convergencia.
   - Representando funciones como series de potencias.
   - Aplicando derivación e integración término a término de una serie de potencias en un intervalo de convergencia apropiado.

   d) Representar funciones como una serie de potencias utilizando Series de Taylor y Maclaurin.
   - Determinando la serie de Maclaurin de una función y su radio de convergencia.
   - Determinando la serie de Taylor de una función en un punto.
   - Integrando funciones representadas como una serie infinita, usando la serie de Taylor y Maclaurin.
   - Multiplicando y dividiendo series de potencias obtenidas usando la serie de Taylor o Maclaurin de una función.

3. **Vectores y el Espacio** $\mathbb{R}^3$

a) Reconocer el sistema coordenado tridimensional y sus elementos.

- Localizando puntos en el espacio dadas sus coordenadas.
- Aplicando la fórmula de la distancia entre dos puntos para resolver problemas.
- Describiendo gráficamente o con palabras, regiones presentadas a partir de una ecuación o desigualdad.
- Describiendo con una ecuación o una desigualdad a una región descrita gráficamente o con palabras.
- Determinando la ecuación de una esfera.
- Resolviendo problemas que involucran esferas y otros sólidos.

b) Comprender el concepto de vector, su interpretación, operaciones y propiedades.

- Clasificando magnitudes en escalares o vectoriales.
- Combinando vectores de forma algebraica y geométrica.
- Representando un segmento dirigido mediante un vector.
- Calculando la magnitud de un vector.
- Reconociendo cuándo dos vectores tienen la misma dirección.

c) Comprender los conceptos de producto punto, producto cruz, sus propiedades e interpretación geométrica.

- Reconociendo si tienen sentido expresiones que involucran el producto punto y el producto cruz.
- Calculando el producto punto y el producto cruz entre dos vectores.
- Determinando si dos vectores son ortogonales usando el producto punto.
- Utilizando el producto cruz para encontrar un vector ortogonal a otros dos vectores dados.
- Resolver problemas de área y volumen que involucran el uso del producto cruz.

d) Reconocer los conceptos de rectas y planos en el espacio y sus distintas representaciones.

- Identificando relación de paralelismo y perpendicularidad entre planos, rectas y entre rectas y planos.
- Determinando la ecuación vectorial, paramétrica o simétrica de una recta a partir de la información dada.
- Determinando la intersección entre rectas, rectas y planos, entre dos planos.
- Determinando la ecuación de un plano a partir de la información dada.
- Esbozando la gráfica de un plano en el espacio.

4. **Funciones de Varias Variables**

a) Comprender funciones de dos y tres variables como una extensión de las ideas ya conocidas para funciones de una variable.

- Determinando el dominio máximo de una función de dos o tres variables.
- Evaluando funciones de dos o tres variables.
- Esbozando las curvas de nivel de una función de dos variables.
- Identificando la gráfica de una función de dos variables.

b) Comprender los conceptos de límite y continuidad de funciones de dos o tres variables.
- Conjeturando acerca del valor del límite en un punto a partir de una tabla de datos.
- Calculando el límite de una función de dos o tres variables usando acotamiento, manipulación algebraica, coordenadas polares o probando su no existencia.
- Determinando el conjunto de puntos en el cual una función es continua.
- Determinado el límite de una función.
- Demostrando la continuidad de una función en un punto.

c) Trabajar con derivadas parciales y derivadas parciales de orden superior.
- Reconociendo la interpretación de la derivada parcial como una variación.
- Reconociendo la interpretación de la derivada parcial como una pendiente.
- Calculando las primeras derivadas parciales de una función de dos o tres variables de manera algebraica o por definición.
- Calculando las segundas y terceras derivadas parciales de una función de dos o tres variables.
- Verificando que una función satisface una ecuación en derivadas parciales.
- Aplicando el Teorema de Clairaut para resolver problemas que involucran derivadas parciales.

d) Comprender el concepto de plano tangente y su similitud con la construcción de la recta tangente en un punto, en una función de una variable.
- Encontrando la ecuación del plano tangente a una superficie en un punto dado.
- Resolviendo problemas que involucran a la obtención de la ecuación del plano tangente para obtener una linealización y aproximación lineal de una función en un punto.
- Relacionando el concepto de diferenciabilidad con el de linealización.
- Aplicando el teorema que entrega una condición suficiente para probar la diferenciabilidad.

e) Aplicar la regla de la cadena para derivar una función compuesta.
- Calculando derivadas de diversas funciones compuestas.
- Dibujando un diagrama de árbol para describir una relación entre las variables.
- Aplicando el teorema de la función implícita para calcular derivadas parciales.

f) Comprender el concepto de derivada direccional.
- Aplicando la definición para obtener una derivada direccional.
- Interpretando geométricamente el concepto de derivada direccional.
- Calculando una derivada direccional dada una función y un vector unitario.

g) Comprender el concepto de gradiente y sus interpretaciones.
- Reconociendo al gradiente como la dirección en que ocurre el valor máximo de la derivada direccional (máxima razón de cambio).
- Usar el gradiente para obtener la ecuación de la recta tangente a una curva de nivel, del plano tangente a una superficie de nivel y de las rectas normales.

h) Usar las derivadas parciales para localizar los máximos y mínimos de una función de dos variables.

- Identificando los puntos críticos de una función, de manera algebraica y en sus curvas de nivel.
- Clasificando los puntos críticos en máximo local, mínimo local o punto silla.
- Resolviendo problemas de optimización en contextos diversos.
- Aplicando el teorema del valor extremo para funciones de dos variables sobre un conjunto cerrado y acotado.
- Usando el método de Lagrange para maximizar o minimizar una función sujeta a una restricción.

5. **Integrales Dobles y Triples**

a) Comprender las integrales dobles como una extensión de la integral definida en una variable.

- Estimando volúmenes de sólidos sobre regiones rectangulares usando sumas de Riemann.
- Calculando integrales dobles mediante su interpretación como volumen de sólido conocidos.
- Usando la regla del punto medio para estimar el valor de una integral.
- Aplicando la propiedad de linealidad de la integral para integrales dobles sobre rectángulos.
- Evaluando integrales iteradas.
- Aplicando el teorema de Fubini para evaluar integrales dobles sobre rectángulos.
- Reconociendo regiones planas de tipo 1 y tipo 2.
- Evaluando integrales dobles sobre regiones de tipo 1 y tipo 2.
- Calculando el volumen de un sólido que está sobre una región de tipo 1 o tipo 2 y bajo otra superficie, usando una integral doble.
- Aplicando la propiedad de linealidad de la integral para integrales dobles sobre regiones generales.
- Aplicando la propiedad de la integral que evaluar integrales dobles sobre regiones que no son ni tipo 1 ni 2, pero que se pueden expresar como unión de dos regiones de tipo 1 o tipo 2.
- Calculando el área de una región D como la integral doble de la función constante $f(x, y) = 1$.
- Acotando el valor de una integral doble a partir del área de la región y las cotas para la función sobre la región.

b) Utilizar el sistema de coordenadas polares para describir una región D y calcular una integral doble haciendo el cambio a coordenadas polares.

- Describiendo una región plana en el sistema de coordenadas polares.
- Evaluando una integral doble haciendo el cambio a coordenadas polares.
- Utilizando integrales dobles para calcular el área de regiones encerradas por curvas definidas en coordenadas polares.
- Calculando el volumen de un sólido sobre una región D que se puede describir usando coordenadas polares.

c) Comprender el concepto de integrales triples, entendiendo las integrales triples y como una extensión de la idea de la integral definida.

- Reconociendo la estimación de una integral triple, sobre una caja rectangular, como una triple suma de Riemann.
- Reconociendo a la integral triple, sobre una caja rectangular, como el límite de una triple suma de Riemann.
- Aplicando el teorema de Fubini para evaluar integrales triples sobre cajas rectangulares.
- Identificando y describiendo regiones de tipo 1,2 y 3.
- Evaluando integrales triples sobre regiones de tipo 1,2 y 3.
- Reescribiendo una integral triple en un orden diferente.
- Calculando el área de una región E tridimensional, como la integral triple de la función constante $f(x, y, z) = 1$.

d) Utilizar el sistema de coordenadas cilíndricas para dar una descripción conveniente de algunas superficies y sólidos comunes, para calcular integrales triples de manera más sencilla.

- Graficando puntos del espacio en coordenadas cilíndricas a partir de la definición y su interpretación geométrica.
- Graficando puntos del espacio en coordenadas cilíndricas, obteniendo sus coordenadas rectangulares.
- Describiendo una superficie con una ecuación en coordenadas rectangulares, dada su ecuación en coordenadas cilíndricas.
- Reconociendo la conveniencia de utilizar coordenadas cilíndricas cuando la proyección de la región tridimensional E sobre alguno de los planos xy, xz o yz tiene una descripción conveniente en coordenadas polares.
- Evaluando una integral triple usando la fórmula para la integración triple en coordenadas cilíndricas.

e) Utilizar el sistema de coordenadas esféricas para simplificar la evaluación de integrales triples sobre regiones tridimensionales acotadas por esferas o conos.

- Graficando puntos del espacio en coordenadas esféricas a partir de la definición y su interpretación geométrica.
- Graficando puntos del espacio en coordenadas esféricas, obteniendo sus coordenadas rectangulares.
- Evaluando una integral triple usando la fórmula para la integración triple en coordenadas esféricas.
- Expresando una integral triple usando los tres sistemas de coordenadas y evaluando según sea conveniente.

f) Utilizar un cambio de coordenadas apropiado para evaluar integrales múltiples.

- Determinando imagen y preimagen de una región dado un cambio de coordenadas.
- Calculando el jacobiano del cambio de coordenadas.
- Calculando la integral doble o triple en las nuevas coordenadas.

Requisitos

De los conocimientos previos necesarios para tener éxito en el curso destacamos:

1. Coordenadas cartesianas en el plano.
2. Gráfico de funciones de una variable.
3. Funciones exponencial, logaritmo, trigonométricas y sus inversas.
4. Límites y continuidad de funciones de una variable.
5. Definición y cálculo de derivadas de funciones de una variable, incluyendo dominio de la regla de la cadena.
6. Comprensión y cálculo de la recta tangente a una curva.
7. Definición y cálculo de integral definida en un intervalo finito.
8. Dominio de técnicas de integración como sustitución, integración por partes, sustituciones trigonométricas, fracciones parciales.