PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Facultad de Matemáticas
MAT1620 - Cálculo II - Sección 12
Prof.: Wolfgang RIVERA DE VERA (wcrivera@mat.puc.cl)
Ayud.: Alfonso PIÑA ABARCA (aapina@uc.cl)

AYUDANTÍA Nº6

Convergencia de Series. Repaso Interrogación 2.

Jueves 25 de septiembre de 2014

Problema 1. Determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\sin\left(n^{-\frac{3}{2}}\right)\right)$ converge.

Solución: Uno de los métodos más simples y tradicionales para determinar si una serie es convergente o no es el criterio de comparación al límite. Sin embargo, para emplear este método debemos encontrar alguna serie de la cual conozcamos si converge o no. Para esta serie, trataremos de aproximar el término a_n por algún otro más simple (y que se comporte de forma similar cuando n tiende al infinito). Veamos lo siguiente:

- $\sin(x)$

  Sabemos que $\sin(x) \approx x$ cuando x es cercano a cero. Para ello recordemos el siguiente límite notable:

  $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

  Luego, podemos decir que para cercanías de $x = 0$ se tiene que $\sin(x) \approx x$.

  Ya teniendo esto en cuenta, podemos decir que cuando $n \to \infty$ se tiene que $n^{-3/2} \to 0$, por lo que:

  $$\sin(n^{-3/2}) \approx n^{-3/2}$$

- $\ln(1+x)$

  Ya que $\sin(n^{-3/2}) \approx n^{-3/2}$, lo que debemos aproximar ahora es $\ln(1+n^{-3/2})$. De manera análoga al caso anterior, se tiene que cuando $x \to 0$ observamos que $\ln(1+x) \approx x$. Así, tenemos que $\ln(1+n^{-3/2}) \approx n^{-3/2}$. Finalmente,

$$\ln\left(1+\sin\left(n^{-3/2}\right)\right) \approx n^{-3/2}$$

Criterio de Comparación al límite. Sean $a_n \geq 0$ y $b_n > 0$. Si se define:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

Se puede decir que si:

$$L = \begin{cases} \in]0,\infty[& \text{Las series } \sum a_n \text{ y } \sum b_n \text{ convergen o divergen juntas} \\ 0 & \text{La serie } \sum a_n \text{ converge si la serie } \sum b_n \text{ converge} \\ \infty & \text{La serie } \sum b_n \text{ converge si la serie } \sum a_n \text{ converge} \end{cases}$$

Ahora, usando el criterio de comparación al límite, y definiendo $a_n = \ln\left(1+\sin\left(n^{-3/2}\right)\right)$ y $b_n = n^{-3/2}$, se tiene que:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\sin\left(n^{-3/2}\right)\right)}{n^{-3/2}} \\ &= \lim_{m\to 0} \frac{\ln(1+\sin(m))}{m} \\ &= \lim_{m\to 0} \frac{\frac{1}{1+\sin(m)}\cdot\cos(m)}{1} = 1 \end{aligned}$$

Sabemos que $\sum n^{-3/2}$ converge. Luego, ya que el límite resultó ser $L = 1$ se tiene que por el criterio de comparación al límite, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\sin\left(n^{-3/2}\right)\right)$ converge.

Problema 2. Determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+1}$ converge.

Solución: Podemos ver que la serie dada es alternante. De esta forma, podemos determinar si la serie converge comprobando las condiciones del criterio de la serie alternante o Leibnitz.

Criterio de Leibnitz. Sea la serie alternante de la forma $\sum (-1)^n a_n$ o $\sum (-1)^{n+1} a_n$ o similar. Se puede decir que la serie converge si se cumplen las siguientes condiciones:

- $a_n \geq 0$
- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
- a_n decreciente

Comprobando:

- $a_n \geq 0$

  Se conoce que $n \geq 0$, por lo que $n^2 \geq 0$ y $n^3 + 1 \geq 1 > 0$. Entonces,

  $$a_n = \frac{n^2}{n^3+1} \geq 0$$

- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

  $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3+1} = 0$$

- a_n decreciente

  No es fácil demostrar que a_n es decreciente sólo partiendo con $a_{n+1} \leq a_n$ (de la forma tradicional). Sin embargo, para este caso podemos considerar la función relacionada al término a_n y luego obtener su derivada. De esta forma,

  $$f(x) = \frac{x^2}{x^3+1}$$

  Y luego,

  $$f'(x) = \frac{x(2-x^3)}{(x^3+1)^2}$$

Para que sea decreciente, se debe cumplir que $f'(x) < 0$. Luego, considerando $x \geq 0$ (ya que $n \geq 0$) se tiene que esta condición se cumple si $2 - x^3 < 0$, es decir, para $x > \sqrt[3]{2} \approx 1{,}26$. Esto significa que $f(n+1) < f(n)$ y por lo tanto $a_{n+1} < a_n$ cuando $n \geq 2$ (ya que $x \geq 1{,}26$).

Observe que no se obtiene que sea decreciente para $n \geq 1$, que es lo que nos interesa. Sin embargo, lo que realmente importa que que a_n sea decreciente cuando $n \to \infty$. Además, se puede comprobar de forma directa que $b_2 < b_1$.

Entonces, ya que se cumplen todas las condiciones del criterio de la serie alternante o criterio de Leibnitz, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+1}$ converge.

Problema 3. Encuentre los valores de α para los cuales la siguiente serie converge:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$$

Solución: Tenemos que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)=\sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha}\left(\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}}\right)$$

Multiplicamos arriba y abajo por $\frac{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$, obteniendo

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha}\left(\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}}\right)\cdot\frac{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha}\left(\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}\right)$$

Podemos notar que:

$$\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}\leq\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{k}(2\sqrt{k})}=\frac{1}{2k\sqrt{k}}$$

Así que,

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha}\frac{1}{2k\sqrt{k}}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{3/2-\alpha}}$$

Condición de convergencia. Sea la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a}}$. Ella converge cuando $a>1$.

Debido a lo anterior, para que la serie converja se debe cumplir que:

$$\frac{3}{2}-\alpha>1$$

$$\alpha<\frac{1}{2}$$

Por lo tanto, la serie converge cuando $\alpha<\frac{1}{2}$.

Problema 4. Encuentre los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales la siguiente serie converge:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x+1}{x} \right)^k$$

Solución: Considere lo siguiente:

Condición de convergencia de serie geométrica. Sea la serie geométrica $\sum_{k=1}^{\infty} r^k$. Ella converge cuando $|r| < 1$.

Luego, la serie converge si y sólo si

$$\left| \frac{x+1}{x} \right| < 1$$

Escrito de otra forma,

$$-1 < \frac{x+1}{x} < 1$$

De aquí se obtienen tres casos:

- $x = 0$
  La expresión se indetermina.
- $x > 0$
  Se obtiene $-x < x + 1 < x$ que es una condición imposible ya que nunca se cumple $x + 1 < x$.
- $x < 0$
  Se obtiene $-x > x + 1 > x$ de la cual se desprende $-x > x + 1$ y por consiguiente $x < -\frac{1}{2}$.

Finalmente, la serie converge cuando $x < -\frac{1}{2}$.

Problema 5. Calcule el valor de la serie $\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2-1}\right)$.

Solución: Se tiene que:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2-1}\right) = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{(k+1)(k-1)}\right)$$

Por fracciones parciales:

$$\frac{1}{(k+1)(k-1)} = \frac{A}{k+1} + \frac{B}{k-1} = \frac{A(k-1)+B(k+1)}{(k+1)(k-1)} = \frac{(A+B)k+(B-A)}{(k+1)(k-1)}$$

Luego, se obtiene $A+B=0$ y $B-A=1$. Esto entrega los valores de $A=-1/2$ y $B=1/2$. Así, la serie se reescribe como:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2-1}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}$$

Definamos $a_k = \frac{1}{k}$. Reemplazando, se tiene que:

$$\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty} a_{k-1} - a_{k+1} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} a_{k-1} - a_{k+1}$$

Claramente tenemos una serie telescópica. Podemos desarrollarla de dos formas: la primera es tratar de visualizar lo que nos resulta y expresar la serie como una suma de términos.

$$\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} a_1 - a_3 + a_2 - a_4 + a_3 - a_5 + a_4 - a_6 + \cdots + a_{n-2} - a_n + a_{n-1} - a_{n+1}$$

Lo que resulta,

$$\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} (a_1 + a_2 - a_n - a_{n+1}) = \frac{1}{2}(a_1+a_2) - \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(a_n + a_{n+1}) = \frac{1}{2}(a_1+a_2) - 0 = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

La otra forma es sumar y restar a_k al término general de la serie. Con esto se obtiene que:

$$\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n} a_{k-1} - a_{k+1} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n} a_{k-1} - a_k + a_k - a_{k+1}$$

$$\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=2}^{n}(a_{k-1}-a_k) + \sum_{k=2}^{n}(a_k - a_{k+1})\right]$$

Esto es más fácil verlo: cuando tenemos una suma de una sucesión con las resta de dos términos consecutivos (como se observa en la suma anterior), se dice lo siguiente:

Serie telescópica. El término con subíndice más grande evaluado en el más grande (límite superior de la suma) y el término con subíndice más chico evaluado en el más chico (límite inferior de la suma).

De esta manera tenemos que:

$$\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=2}^{n}(a_{k-1}-a_k)+\sum_{k=2}^{n}(a_k-a_{k+1})\right]=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left[a_1-a_n+a_2-a_{n+1}\right]$$

Lo que es,

$$\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2-a_n-a_{n+1})=\frac{1}{2}(a_1+a_2)-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(a_n+a_{n+1})=\frac{1}{2}(a_1+a_2)-0=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$$

Por lo tanto,

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2-1}\right)=\frac{3}{4}$$

Problema 6. Estudie la convergencia de las siguientes series.

Solución:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sin}\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Usemos el criterio de comparación en el límite:

→ Comparemos con $\frac{1}{n^2}$

Luego, como $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ y $\frac{1}{n^2}$ son positivas $\forall n \in \mathbb{N}$, procedemos:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} = 1 \qquad \text{ya que } \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$$

$$\text{y } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

Como el límite es finito y mayor que cero, y $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ CONVERGE}$$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n + \tan\left(\frac{1}{n}\right)}$

Usemos el criterio del cociente:

Sea $a_n = \dfrac{1}{e^n + \tan\left(\frac{1}{n}\right)}$

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{e^{n+1} + \tan\left(\frac{1}{n+1}\right)}}{\frac{1}{e^n + \tan\left(\frac{1}{n}\right)}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{e^n + \tan\left(\frac{1}{n}\right)}{e^{n+1} + \tan\left(\frac{1}{n+1}\right)}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1 + \tan\left(\frac{1}{n}\right)e^{-1}}{e + \tan\left(\frac{1}{n+1}\right)e^{-1}}\right| = \frac{1}{e}$$

Como $L < 1$ se tiene que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n + \tan\left(\frac{1}{n}\right)}$ converge absolutamente.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{e^{1/n}-1}$

Usamos el criterio de comparación al límite:

→ Comparemos con $\frac{1}{n}$

Luego, como $\frac{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{e^{1/n}-1}$ y $\frac{1}{n}$ son positivos, tenemos que:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{e^{1/n}-1}}{\frac{1}{n}}$$

Hagamos un cambio de variables:

Sea $u = \frac{1}{n}$ $\quad n \to \infty$, $u \to 0^+$

$$L = \lim_{u\to 0^+} \frac{\frac{1-\cos(u)}{e^u-1}}{u} = \lim_{u\to 0^+} \frac{1-\cos(u)}{u(e^u-1)}$$

Recordemos que:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

Reordenando:

$$L = \lim_{u\to 0^+} \frac{\frac{1-\cos(u)}{u^2}}{\frac{e^u-1}{u}} = \frac{\lim_{u\to 0^+} \frac{1-\cos(u)}{u^2}}{\lim_{u\to 0^+} \frac{e^u-1}{u}} = \frac{1}{2}$$

Como el límite es finito y mayor que cero se tiene que

$\sum \frac{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{e^{1/n}-1}$ DIVERGE ya que $\sum \frac{1}{n}$ diverge

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

Usemos el criterio de Leibnitz

Tenemos una serie alternante, para que converja necesitamos que su término general $\left(\text{sen}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ sea positivo y decreciente a cero.

- $\text{sen}\left(\frac{1}{n}\right) > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- Decrecimiento: $a_n > a_{n+1} \rightarrow \text{sen}\left(\frac{1}{n}\right) > \text{sen}\left(\frac{1}{n+1}\right) \rightarrow$ CIERTO
- Límite cero: $\lim_{n\to\infty} \text{sen}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$

Luego, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \text{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$ CONVERGE.

e) $\sum_{n=0}^{\infty} a^n n^a$

Usemos el criterio de la raíz al límite

$$L = \lim_{n\to\infty} |a^n n^a|^{1/n} = |a| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n^a|} = |a| \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^a = |a|\, 1^a = |a|$$

Ahora se tiene que, si:

$|a| < 1 \rightarrow$ La serie CONVERGE

$|a| = 1 \rightarrow$ Este criterio no es concluyente

$|a| > 1 \rightarrow$ La serie DIVERGE

Observe que si:

$a = 1$: $\sum n \rightarrow$ DIVERGE

$a = -1$: $\sum (-1)^n \frac{1}{n} \rightarrow$ CONVERGE por Leibnitz

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdot 9\cdot \ldots \cdot n^2}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (4n-3)}$

Usemos el criterio del cuociente

Sea $a_n = \frac{1\cdot 4\cdot 9\cdot \ldots \cdot n^2}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (4n-3)}$ y así $a_{n+1} = \frac{1\cdot 4\cdot 9\cdot \ldots \cdot n^2\cdot (n+1)^2}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (4n-3)(4n+1)}$

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1\cdot 4\cdot 9\cdot \ldots \cdot n^2\cdot (n+1)^2}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (4n-3)(4n+1)}}{\frac{1\cdot 4\cdot 9\cdot \ldots \cdot n^2}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (4n-3)}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{4n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+1)}{4n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)(n+1)}{4+\frac{1}{n}} = \infty$$

Como el límite es infinito se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdot 9\cdot \ldots \cdot n^2}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (4n-3)} \quad \text{DIVERGE}$$

g) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!\ln(n)^2}$

Usemos el criterio del cuociente

Sea $a_n = \frac{1}{n!\ln(n)^2}$ y así $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!\ln(n+1)^2}$

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)!\ln(n+1)^2}}{\frac{1}{n!\ln(n)^2}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n!\ln(n)^2}{(n+1)!\ln(n+1)^2} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)^2}{(n+1)\ln(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)} \cdot \left(\frac{\ln(n)}{\ln(n+1)}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\ln(n)}{\ln(n+1)}\right)^2$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \cdot 1 = 0$$

Luego, como el límite es menor que 1 se tiene que la

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!\ln(n)^2} \quad \text{CONVERGE}$$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n \arctan(n)^n}$

Usamos el criterio de la raíz al límite

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{2^n \arctan(n)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\arctan(n)} = \frac{3}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\arctan(n)}$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{3}{\pi}$$

Como el límite es menor que 1, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n \arctan(n)^n} \quad \text{CONVERGE}$$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}$

Usemos el criterio de la raíz al límite

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2+(-1)^n}{2^n}} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2+(-1)^n}$$

Por el criterio del sandwich

$$1 \leq 2+(-1)^n \leq 3 \qquad / \sqrt[n]{\ }$$

$$1 \leq \sqrt[n]{2+(-1)^n} \leq \sqrt[n]{3} \qquad / \lim_{n\to\infty}(\,)$$

$$1 \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2+(-1)^n} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3} = 1$$

$$\rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2+(-1)^n} = 1$$

Así, $L = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2+(-1)^n} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$

Como el límite es menor que 1, la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^k}{2k} \qquad \text{CONVERGE}$$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{2^n}$

Usamos el criterio de la raíz al límite:

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{2n}\right|} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|n\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right|}$$

Por teorema del sandwich

$$0 \leq \left|\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right| \leq 1 \qquad \text{pero} \quad \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\frac{n\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{Z}$$

entonces $\left|\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right| > 0$

o bien, $\left|\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right| \geq 0 + \varepsilon = \varepsilon \quad$ con $\quad \varepsilon > 0$

$$\varepsilon \leq \left|\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right| \leq 1 \qquad / \cdot n$$

$$n\varepsilon \leq \left|n\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right| \leq n \qquad / \sqrt[n]{\ }$$

$$\sqrt[n]{n\varepsilon} \leq \sqrt[n]{\left|n\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right|} \leq \sqrt[n]{n} \qquad / \lim_{n\to\infty}(\ )$$

$$1 \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|n\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right|} \leq 1$$

Así, $L = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|n\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right|} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$

Como el límite es menor que 1, la serie converge absolutamente. Por lo tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{2^n} \quad \text{CONVERGE}$$

k) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{2k+1}}$

Usemos el criterio de Leibnitz

Tenemos una serie alternante, para que converja se debe tener que $\frac{1}{\sqrt{2k+1}}$ sea positivo y decreciente a cero.

- Positividad: $\frac{1}{\sqrt{2k+1}} > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$
- Decrecimiento: $a_{n+1} < a_n \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2k+3}} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \quad \forall k \in \mathbb{N}$
- Límite: $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2k+1}} = 0$

Por lo tanto, por el criterio de Leibnitz la serie CONVERGE.

Observe que:

$$\sum_{K=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{K-1}}{\sqrt{2K+1}} \right| = \sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2K+1}} \quad \text{diverge, ya que}$$

$$L = \lim_{K\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{2K+1}}}{\frac{1}{\sqrt{K}}} = \lim_{K\to\infty} \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{2K+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{y } \sum \frac{1}{\sqrt{K}} \text{ diverge}$$

Debido a lo anterior, se dice que

$$\sum_{K=1}^{\infty} \frac{(-1)^{K-1}}{\sqrt{2K+1}} \quad \text{CONVERGE CONDICIONALMENTE}$$

l) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{k}}{(k+1)\sqrt{k+3}}$

Esta serie se comporta como

$$\sum \frac{\sqrt[3]{K}}{K\sqrt{K}} = \sum \frac{K^{1/3}}{K^{3/2}} = \sum \frac{1}{K^{7/6}}$$

Por lo tanto, usemos el criterio de comparación al límite

→ Comparamos con $\frac{1}{K^{7/6}}$ que sí converge ya que es una "serie p" con $\alpha > 1$.

$$L = \lim_{K\to\infty} \frac{\frac{\sqrt[3]{K}}{(K+1)\sqrt{K+3}}}{\frac{1}{K^{7/6}}} = \lim_{K\to\infty} \frac{K^{1/3} \cdot K^{7/6}}{(K+1)\sqrt{K+3}} = \lim_{K\to\infty} \frac{K^{3/2}}{K\left(1+\frac{1}{K}\right)K^{1/2}\sqrt{1+\frac{3}{K}}} = 1$$

Como 1 es un número finito y mayor que cero se tiene que la serie

$$\sum_{K=0}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{K}}{(K+1)\sqrt{K+3}} \quad \text{CONVERGE}$$

Problema 7. Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente con $a_n \neq 1$. Demuestre que las series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_n+1}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1-a_n}$ convergen.

Solución: Se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, por esta razón se desprende que por la prueba de convergencia de series:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Ahora, apliquemos el criterio de comparación al límite. Para ello usamos una serie conocida: utilizaremos la serie de a_n que sabemos que sí converge.

Para el caso de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_n+1}$ se tiene que:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a_n}{1+a_n}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+a_n} = \frac{1}{1+\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = \frac{1}{1+0} = 1$$

De esta forma, ya que $L = 1$ y $0 < 1 < \infty$ se tiene que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_n+1}$ converge.

Para el caso de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1-a_n}$ se tiene que:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a_n}{1-a_n}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-a_n} = \frac{1}{1-\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = \frac{1}{1-0} = 1$$

De esta forma, ya que $L = 1$ y $0 < 1 < \infty$ se tiene que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1-a_n}$ converge.

Problema 8. Determine en términos de $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ el valor de $Z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3}$ y luego muestre que $\frac{1}{2} \leq S \leq \frac{3}{2}$.

Solución:

$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$

Observemos que:

$\frac{S}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^3}$ → Vemos que esto es una suma de solo términos pares: a_2, a_4, a_6, etc.

Nos piden $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3}$ → Vemos que esto es una suma de sólo términos impares: a_1, a_3, a_5, etc.

y además $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ → suma de todos los términos: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$, etc.

Así se tiene que:

$$\sum_{n=1}^{2K} \frac{1}{n^3} = \sum_{n=1}^{K} \frac{1}{(2n-1)^3} + \sum_{n=1}^{K} \frac{1}{(2n)^3} \quad / \lim_{K\to\infty}(\,)$$

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}}_{\text{TODOS}} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3}}_{\text{IMPARES}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^3}}_{\text{PARES}}$$

$$\leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^3}$$

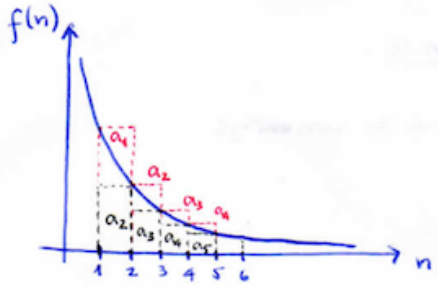
pero $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = S$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^3} = \frac{S}{8}$

Así que: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} = S - \frac{S}{8} = \frac{7}{8}S$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} = \frac{7}{8}S$

Ahora, nos piden demostrar que $\frac{1}{2} \leq S \leq \frac{3}{2}$

Sea $f(x) = \frac{1}{x^3}$; $f(x)$ es decreciente



Vemos que

$$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^3} < \int_n^{n+1} f(x)dx < \frac{1}{n^3} = a_n \quad \forall n$$

Si aplicamos sumatoria...

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3} < \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x)dx < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \int_1^{\infty} f(x)\,dx < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \quad , \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} - 1$$

con $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = S$

$$S-1 < \int_1^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx < S \quad \leftrightarrow \quad S-1 < -\frac{1}{2x^2}\Big|_1^{\infty} < S$$

$$\leftrightarrow \quad S-1 < \frac{1}{2} < S \quad /-S$$

$$-1 < \frac{1}{2} - S < 0 \quad /\cdot(-1)$$

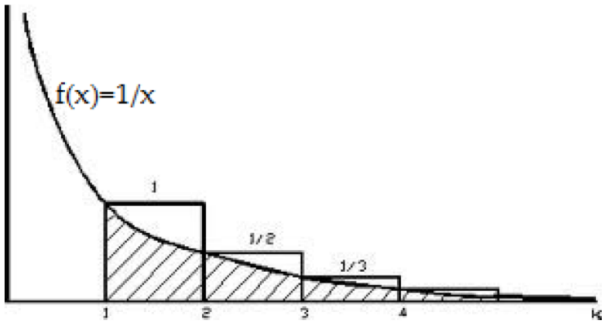
$$1 > S - \frac{1}{2} > 0 \quad /+\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{3}{2} > S > \frac{1}{2}$$

$\therefore \frac{1}{2} < S < \frac{3}{2}$

Problema 9. Considere la serie armónica $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$. Demuestre que $R_n = S_n - \ln(n)$ es una sucesión positiva y decreciente donde $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Solución: Se tiene que $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ y $R_n = S_n - \ln(n)$. Veamos el siguiente gráfico:



Podemos notar que el área bajo la curva $f(x) = \frac{1}{x}$ (achurada) es menor que el área de los rectángulos, que representan a la serie $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Por esta razón, se tiene que (comparación serie-integral):

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \int_1^n \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln(n)$$

Donde se tiene que:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \ln(n)$$

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) > 0$$

Por lo que queda demostrado que R_n es una sucesión positiva.

Luego, debemos demostrar que R_n sea decreciente. De esta forma, se quiere probar una de las tres opciones siguientes:

a) $R_{n+1} < R_n$

b) $\frac{R_{n+1}}{R_n} < 1$

c) $R_n \to R(x)$: $R'(x) < 0$

Para este caso usaremos la primera opción (note que en este caso no es tan sencillo derivar debido a la formulación de R_n: se compone de una sumatoria y una función). Luego,

$$R_{n+1} < R_n$$

$$R_{n+1} - R_n < 0$$

$$\underbrace{S_{n+1} - \ln(n+1)}_{R_{n+1}} - \underbrace{[S_n - \ln(n)]}_{R_n} < 0$$

$$S_n + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) - S_n + \ln(n) < 0$$

$$\frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) < 0$$

Para que esto se cumpla $\forall n \in \mathbb{N}$, se debe cumplir su versión continua $\forall x \geq 1$.

$$\frac{1}{x+1} - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) < 0$$

Análogamente, queremos que $\forall x \geq 1$:

$$\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} > 0$$

Sea $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$.

Para asegurarnos que $f(x)$ sea siempre positiva y se cumpla siempre la relación anterior tenemos dos casos:

1. **Caso 1:** $f(x_0) > 0$ y $f'(x) > 0$ para algún $x_0 \geq 1$ y $\forall x \geq x_0$
2. **Caso 2:** $f(x_0) > 0$ y $f'(x) < 0$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f(x_0) \geq 0$ para algún $x_0 \geq 1$ y $\forall x \geq x_0$

Partamos con el Caso 1. Sea $x_0 = 1$ y $x \geq 1$:

$$f(x_0) = f(1) = \ln(2) - \frac{1}{2} \approx 0{,}193 > 0 \qquad \text{se cumple}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x(x+1)^2} > 0 \qquad \text{no se cumple para } x \leq 1$$

Veamos el Caso 2. Sea $x_0 = 1$ y $x \geq 1$:

$$f(x_0) = f(1) = \ln(2) - \frac{1}{2} \approx 0{,}193 > 0 \qquad \text{se cumple}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x(x+1)^2} < 0 \qquad \text{se cumple para } x \leq 1$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} = 0-0 \leq 0 \qquad \text{se cumple}$$

Por lo tanto, se tiene que:

$$\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} > 0$$

Y, del mismo modo,

$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} > 0$$

$$\frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) < 0$$

$$R_{n+1} - R_n < 0$$

Finalmente, R_n es decreciente.

Problema 10. Estudie la convergencia de la integral $\int_1^\infty \frac{x^2}{4x^4+2x^3+x+1}\mathrm{d}x$ a través de dos métodos distintos.

Solución: Este ejercicio debe ser hecho mediante dos métodos distintos. Usaremos el criterio de comparación de integrales y el método comparación al límite.

Partamos por el criterio de comparación. Para $x \geq 1$ se tiene que:

$$4x^4 + 2x^3 + x + 1 \geq 4x^4$$

$$\frac{1}{4x^4 + 2x^3 + x + 1} \leq \frac{1}{4x^4}$$

$$\frac{x^2}{4x^4 + 2x^3 + x + 1} \leq \frac{x^2}{4x^4} = \frac{1}{4x^2}$$

Luego, como $\int_1^\infty \frac{1}{4x^2}\mathrm{d}x$ converge, $\int_1^\infty \frac{x^2}{4x^4+2x^3+x+1}\mathrm{d}x$ también converge.

Por el criterio comparación al límite. Tomemos $g(x) = \frac{1}{x^2}$ cuya integral converge. El límite del cuociente está dado por:

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{4x^4+2x^3+x+1}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{4} > 0$$

Como el límite es distinto de cero y de infinito, entonces $\int_1^\infty \frac{x^2}{4x^4+2x^3+x+1}\mathrm{d}x$ converge.

Problema 11. Demuestre que si $\int_a^\infty |f(x)|\mathrm{d}x$ es convergente, entonces $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ converge (donde a es positivo).

Solución: Sabemos que:

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

Empleando el criterio de comparación de integrales, y ya que $f(x) \leq |f(x)|$ se tiene que si $\int_a^\infty |f(x)|\mathrm{d}x$ converge, entonces $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ converge.

Observaciones:

- Si la integral de $|f(x)|$ converge se dice que la integral de $f(x)$ **converge absolutamente**.
- Si la integral de $f(x)$ converge y la integral de $|f(x)|$ diverge, se dice que $f(x)$ **converge condicionalmente**.

Problema 12. Utilice el resultado anterior y determine si la integral $\int_{2\pi}^{4\pi} \frac{\cos(x)}{\sqrt[4]{x-2\pi}}\mathrm{d}x$ converge o diverge.

Solución: Si $f(x) = \frac{\cos(x)}{\sqrt[4]{x-2\pi}}$, entonces $|f(x)| = |\frac{\cos(x)}{\sqrt[4]{x-2\pi}}|$. Trabajemos con $|f(x)|$. Así tenemos que:

$$\left|\frac{\cos(x)}{\sqrt[4]{x-2\pi}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt[4]{x-2\pi}}$$

ya que $|\cos(x)| \leq 1$ y $\sqrt[4]{x-2\pi} \geq 0$.

Pero qué pasa con $\int_{2\pi}^{4\pi} \frac{1}{\sqrt[4]{x-2\pi}}\mathrm{d}x$. ¿Converge o diverge?

Si la hacemos sustitución:

$$\begin{array}{cccc} u = x - 2\pi & & du = dx & \\ x \to 2\pi \quad u \to 0 & & x \to 4\pi \quad u \to 2\pi & \end{array}$$

Así se obtiene:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt[4]{u}}\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{u}}\mathrm{d}u + \int_1^{2\pi} \frac{1}{\sqrt[4]{u}}\mathrm{d}u$$

La cual converge porque $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{u}}\mathrm{d}u$ es una integral del tipo p entre 0 y 1 con $p = 1/4$ (convergente) y $\int_1^{2\pi} \frac{1}{\sqrt[4]{u}}\mathrm{d}u$ es una integral propia (integral que puede ser calculada normalmente).

Luego, como $\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt[4]{u}}\mathrm{d}u$ converge, $\int_{2\pi}^{4\pi} \frac{1}{\sqrt[4]{x-2\pi}}\mathrm{d}x$ converge.

Ahora, por comparación, como $\int_{2\pi}^{4\pi} \frac{1}{\sqrt[4]{x-2\pi}}\mathrm{d}x$ converge, $\int_{2\pi}^{4\pi} |\frac{\cos(x)}{\sqrt[4]{x-2\pi}}|\mathrm{d}x$ también converge.

Y usando el resultado del ejercicio anterior, ya que $\int_a^{\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ converge, entonces $\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge.

Finalmente,

$$\int_{2\pi}^{4\pi} \frac{\cos(x)}{\sqrt[4]{x-2\pi}}\mathrm{d}x$$

converge absolutamente.

Problema 13. Determine si las siguientes series convergen o divergen.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+2)}{(n+3)^2}$

Solución: Una de las primeras cosas que debemos hacer al enfrentarnos a una serie es ver si su término general tiene límite cero. Veamos qué ocurre en este caso.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+2)}{(n+3)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n}{n^2+6n+9} = 1 \neq 0$$

Como el límite del término general es distinto de cero, entonces la serie no puede converger. Por lo tanto la serie diverge.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \frac{(2n-5)}{n(n^2-5)}$

Solución: Apliquemos el criterio del cociente:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1-1} \frac{(2(n+1)-5)}{(n+1)((n+1)^2-5)}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \frac{(2n-5)}{n(n^2-5)}} \right|$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{3^{n-1} n(2n-3)(n^2-5)}{3^n (n+1)(2n-5)[(n+1)^2-5]} \right| = \frac{1}{3} < 1$$

Luego, como el límite es menor que 1 la serie converge.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos(n\pi)}{(n+1)(n+2)}$

Solución: Esta serie se puede escribir como:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos(n\pi)}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n+1)(n+2)}$$

Que es una serie alternante con $a_n = \frac{n}{(n+1)(n+2)}$.

Ahora bien, si utilizamos el criterio de Leibnitz, se tiene que

- $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)} = 0$
- $n \geq 1 \leftrightarrow n^2 + 2n + 1 \leq n^2 + 3n \leftrightarrow (n+1)^2 \leq n(n+3) \leftrightarrow \frac{n+1}{n+3} \leq \frac{n}{n+1} \leftrightarrow \frac{n+1}{(n+2)(n+3)} \leq \frac{n}{(n+1)(n+2)} \leftrightarrow a_{n+1} \leq a_n \leftrightarrow a_n$ decreciente

Por lo tanto, debido a que se cumplen las condiciones del criterio de Leibnitz, la serie converge.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\delta(n)}}{\delta(n)} \quad \text{con } \delta(n) = n + \frac{1}{n}$

Solución: En este caso se tiene la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{n+\frac{1}{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n \sqrt[n]{n}}{\frac{n^2+1}{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n \sqrt[n]{n} n}{n^2+1}$$

Si aplicamos el criterio de la raíz enésima se tiene que:

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n \sqrt[n]{n} n}{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \sqrt[n]{\sqrt[n]{n}} \sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n^2+1}} = \infty > 1$$

Como el límite es mayor que 1 se tiene que la serie diverge.

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(\sqrt{n})+2\sqrt{n}}{(2n-1)\sqrt{n}}$

Solución: Comparemos la serie con la serie armónica. Así tenemos que:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln(\sqrt{n})+2\sqrt{n}}{(2n-1)\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\ln(\sqrt{n})+2n^{\frac{3}{2}}}{(2n-1)\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\ln(\sqrt{n})+2}{2-\frac{1}{n}} = 1$$

Como el límite es finito, se tiene que ambas series se comportan igual. Por lo tanto, como la serie armónica diverge, entonces la serie estudiada también diverge.

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\arctan(n)}}{n^2+1}$

Solución: Para este caso usemos el criterio de la integral. Sea $f(x) = \frac{e^{\arctan(x)}}{x^2+1}$

Luego se tiene que:

$$f'(x) = \frac{e^{\arctan(x)}(1-2x)}{(x^2+1)^2} < 0 \quad \forall \geq 1$$

Por lo tanto $f(x)$ es continua y decreciente en $[1, \infty)$, y de este modo

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty} \frac{e^{\arctan(x)}}{x^2+1} dx = e^{\arctan(x)}\Big]_1^{\infty} = e^{\frac{\pi}{2}} - e^{\frac{\pi}{4}}$$

Así, como la integral converge, entonces la serie también converge.

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)(a+2)(a+3)\ldots(a+n)}$

Solución: Se tiene que:

$$a_n = \frac{n!}{(a+1)(a+2)(a+3)\ldots(a+n)}$$

Usemos el criterio del cociente:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(n+1)!}{(a+1)(a+2)(a+3)\ldots(a+n)(a+n+1)}}{\frac{n!}{(a+1)(a+2)(a+3)\ldots(a+n)}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)}{(a+n+1)}\right| = 1$$

Como el $L = 1$ este criterio no nos da información alguna. Intentemos con el criterio de Raabe:

$$L = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \left|\frac{(n+1)}{(a+n+1)}\right|\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{an}{a+n+1} = a$$

Luego se tiene que si $a > 1$ la serie converge, y si $a < 1$ la serie diverge. ¿Qué pasa en $a = 1$? En este caso tenemos la serie $\sum \frac{1}{n+1}$ la cual diverge.

Por lo tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)(a+2)(a+3)\dots(a+n)} \quad \begin{cases} \text{converge} & \text{si } a > 1 \\ \text{diverge} & \text{si } a \leq 1 \end{cases}$$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n\, n!}$

Solución: Sea $a_n = \frac{n^n}{2^n\, n!}$. Entonces, por el criterio del cociente,

$$L = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}\,(n+1)!}}{\frac{n^n}{2^n\, n!}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^n}{2n^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{2}\right) = \frac{e}{2}$$

$$L > 1$$

Luego, como el límite obtenido es mayor que uno, la serie diverge por el criterio del cociente o razón (o d'Alembert).

Problema 14. Determine si la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)$ converge o diverge. Si converge, calcule el valor. Si diverge, explique por qué.

Solución: Observe que:

$$\ln\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)$$

Ahora, el comportamiento de $\ln\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)$ cuando n tiende a infinito es similar al comportamiento de $\frac{1}{n^2-1}$. Esto es debido a la relación siguiente:

$$\lim_{a\to 0} \ln(1+a) = 1$$

Además, se tiene que $\frac{1}{n^2-1}$ en el infinito se comporta como $\frac{1}{n^2}$. Comparemos $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)$ con $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Por el teorema de comparación al límite se tiene que:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)}{\frac{1}{n^2-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2-1}{n^2}\cdot\frac{2n}{(n^2-1)^2}}{\frac{1}{2n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3}{n(n^2-1)} = 2 > 0$$

Ya que el límite es mayor que cero y menor que infinito, ambas series se comportan igual. Ahora, como $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, entonces $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)$ también converge. ¿Pero a cuánto?

Bien se sabe que una serie es una suma infinita de términos que puede ser obtenida como un límite. Reescribamos la serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right) = \lim_{z\to\infty} \sum_{n=2}^{z} \ln\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)$$

Ahora, recuerde que $\ln(x\cdot y) = \ln(x)+\ln(y)$. De esta forma, una suma de varios logaritmos equivale al logaritmo de una multiplicación de varios términos. Introduzcamos la productoria (o pitatoria):

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right) = \lim_{z\to\infty} \sum_{n=2}^{z} \ln\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right) = \lim_{z\to\infty} \ln\left(\prod_{n=2}^{z} \frac{n^2}{n^2-1}\right)$$

Tratemos de calcular la productoria:

$$\prod_{n=2}^{z} \frac{n^2}{n^2-1} = \frac{\prod_{n=2}^{z} n^2}{\prod_{n=2}^{z} n^2-1} = \frac{\prod_{n=2}^{z} n^2}{\prod_{n=2}^{z} (n+1)(n-1)} = \frac{\prod_{n=2}^{z} n \prod_{n=2}^{z} n}{\prod_{n=2}^{z} (n+1) \prod_{n=2}^{z} (n-1)}$$

$$\prod_{n=2}^{z} \frac{n^2}{n^2-1} = \frac{\left(\prod_{n=2}^{z} n\right)^2}{\left(\prod_{n=2}^{z}(n+1)\right)\left(\prod_{n=2}^{z}(n-1)\right)}$$

¿Cuánto valen cada uno de esos términos?

$$\prod_{n=2}^{z} n = z!$$

$$\prod_{n=2}^{z}(n+1) = \frac{(z+1)!}{2}$$

$$\prod_{n=2}^{z}(n-1) = (z-1)!$$

Reemplazando,

$$\prod_{n=2}^{z} \frac{n^2}{n^2-1} = \frac{(z!)^2}{\frac{(z+1)!}{2}\cdot(z-1)!} = 2\cdot\frac{z!\cdot z!}{(z+1)!\cdot(z-1)!} = 2\cdot\frac{z!\cdot z}{(z+1)!} = \frac{2z}{z+1}$$

Así,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right) = \lim_{z\to\infty}\sum_{n=2}^{z} \ln\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right) = \lim_{z\to\infty} \ln\left(\prod_{n=2}^{z}\frac{n^2}{n^2-1}\right) = \lim_{z\to\infty}\ln\left(\frac{2z}{z+1}\right)$$

Ya que el logaritmo es continuo (para valores positivos de su argumento) se tiene que:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right) = \ln\left(\lim_{z\to\infty}\frac{2z}{z+1}\right) = \ln(2)$$

Por lo tanto, la serie converge a $\ln(2)$.

Problema 15. Determine el valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(1+\alpha)^n}$ sea igual a 2.

Solución: El ejercicio nos muestra una suma geométrica la cual puede ser calculada mediante la fórmula siguiente:

Fórmula.

$$S = \frac{[\texttt{PRIMER TÉRMINO}]\left(1 - r^{[\texttt{N° DE TÉRMINOS}]}\right)}{1-r}$$

Para este caso se tiene que:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(1+\alpha)^n} = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=2}^{m} \frac{1}{(1+\alpha)^n} = \lim_{m\to\infty} \frac{(1+\alpha)^{-2}\left(1 - \left[\frac{1}{1+\alpha}\right]^{m-1}\right)}{1 - \frac{1}{1+\alpha}}$$

Para que el resultado anterior converja se requiere que $\left|\frac{1}{1+\alpha}\right| < 1$, esto es: $|\alpha + 1| > 1$.

Cumpliéndose lo anterior,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(1+\alpha)^n} = \lim_{m\to\infty} \frac{(1+\alpha)^{-2}\left(1 - \left[\frac{1}{1+\alpha}\right]^{m-1}\right)}{1 - \frac{1}{1+\alpha}} = \frac{(1+\alpha)^{-2}}{1 - \frac{1}{1+\alpha}}$$

Pero se requiere $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(1+\alpha)^n} = 2$. Entonces,

$$\frac{(1+\alpha)^{-2}}{1 - \frac{1}{1+\alpha}} = 2$$

$$\frac{1}{\alpha(1+\alpha)} = 2$$

$$2\alpha^2 + 2\alpha - 1 = 0$$

De donde,

$$\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

Pero como se necesita $|\alpha + 1| > 1$, el valor de α que se requiere para cumplir con la condición enunciada es:

$$\alpha = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

Problema 16. Determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$ converge o no a través del criterio de la integral, el criterio de comparación y el criterio de comparación al límite.

Solución:

- Criterio de la integral

Se desea que $\int_1^{\infty} \frac{x}{x^3+1}\mathrm{d}x$ converja. Para este criterio se requiere que $f(x) = \frac{x}{x^3+1}$ sea positiva, decreciente y con límite al infinito igual a cero. En este caso, se cumplen las tres condiciones (puede comprobarlo usted mismo).

Ahora nos preguntamos, ¿converge $\int_1^{\infty} \frac{x}{x^3+1}\mathrm{d}x$? Uno de los criterios de convergencia de integrales impropias es el de comparación. Para $x \geq 1$ se tiene que:

$$\begin{array}{rcl} x^3+1 & \geq & x^3 \\ \dfrac{1}{x^3+1} & \leq & \dfrac{1}{x^3} \\ \dfrac{x}{x^3+1} & \leq & \dfrac{x}{x^3} \\ \dfrac{x}{x^3+1} & \leq & \dfrac{1}{x^2} \end{array}$$

Ahora, como $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ converge por ser una integral del tipo p entre 1 e ∞ con $p > 1$. Entonces, por criterio de comparación de integrales impropias se tiene que $\int_1^{\infty} \frac{x}{x^3+1}\mathrm{d}x$ converge.

Luego, por **criterio de la integral** se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$.

- Criterio de comparación

Se tiene que para $n \geq 1$,

$$\begin{array}{rcl} n^3+1 & \geq & n^3 \\ \dfrac{1}{n^3+1} & \leq & \dfrac{1}{n^3} \\ \dfrac{n}{n^3+1} & \leq & \dfrac{n}{n^3} \\ \dfrac{n}{n^3+1} & \leq & \dfrac{1}{n^2} \end{array}$$

Como $\frac{1}{n^2}$ es mayor que $\frac{n}{n^3+1}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge por ser una serie p, se tiene que por el **criterio de comparación**, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$ converge.

- Criterio de comparación al límite

Comparemos con $\frac{1}{n^2}$.

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n^3+1}}{\frac{1}{n^2}} = 1$$

Como el límite es finito, ambas series se comportan igual. Y como la serie de $\frac{1}{n^2}$ converge, entonces por el **criterio de comparación al límite** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$ converge.

Problema 17. Determine los valores de a para los cuales las siguientes series convergen:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$

Solución: Usemos el criterio de la razón:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|a|}{n+1} = 0$$

El límite es menor que 1 para todo valor de a. Por esta razón, la serie converge para $a \in \mathbb{R}$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} a^n$

Solución: Usemos el criterio de la razón:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} a^{n+1}}{\frac{(-1)^n}{n} a^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|a|n}{n+1} = |a|$$

Por el criterio de la razón se requiere que dicho límite sea menor que 1 para que la serie converja. De esta forma, la serie converge para $|a| < 1$. ¿Pero qué ocurre en $|a| = 1$? Probemos.

Cuando $a = -1$ se tiene la serie armónica la cual diverge. De esta forma, la serie en cuestión diverge cuando $a = -1$.

Cuando $a = 1$ se tiene la serie armónica alternante la cual converge. De esta forma, la serie en cuestión converge cuando $a = 1$.

Finalmente, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} a^n$ converge para $-1 < a \leq 1$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} na^n - \frac{(a-1)^n}{n}$

Solución: La serie puede ser reescrita como:

$$\sum_{n=1}^{\infty} na^n - \frac{(a-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} na^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a-1)^n}{n}$$

Para que converja la serie original se requiere que al menos ambas series converjan por separado. Si aplicamos el criterio de la razón a estas series se tiene que:

- Para $\sum_{n=1}^{\infty} na^n$

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)a^{n+1}}{na^n}\right| = |a| \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = |a|$$

Luego, por el criterio de la razón, converge para $|a| < 1$. Si $a = 1$ la serie diverge y si $a = -1$ la serie también diverge. Entonces, la serie converge para $-1 < a < 1$.

- Para $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a-1)^n}{n}$

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{(a-1)^{n+1}}{n+1}}{\frac{(a-1)^n}{n}}\right| = |a-1| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = |a-1|$$

Luego, por el criterio de la razón, converge para $|a-1| < 1$. Si $a - 1 = 1$ la serie diverge (serie armónica) y si $a - 1 = -1$ la serie converge (serie armónica alternante). Entonces, la serie converge para $0 \leq a < 2$.

Así, la serie original converge cuando $-1 < a < 1$ y $0 \leq a < 2$. Donde, finalmente, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} na^n - \frac{(a-1)^n}{n}$ converge para $0 \leq a < 1$.

Problema 18. Determine si las siguientes series convergen o divergen:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \tan^3\left(\frac{1}{k}\right)$

Solución: Observe que $\tan^3\left(\frac{1}{k}\right)$ se comporta como $\frac{1}{k^3}$ cuando $k \to \infty$. Esto es debido a lo siguiente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin(x)}{x}}{\cos(x)} = 1$$

Y así, $\tan(x) \approx x$ cuando x es cercano a 0. Del mismo modo, $\tan^3(x) \approx x^3$ cuando x es cercano a 0. Y de esta forma, $\tan^3\left(\frac{1}{k}\right) \approx \frac{1}{k^3}$ cuando $k \to \infty$.

Usando el criterio de comparación al límite,

$$L = \lim_{k\to\infty} \frac{\tan^3\left(\frac{1}{k}\right)}{\frac{1}{k^3}} = 1$$

Como el límite es finito, ambas series se comportan igual. Ahora, como la serie de $\frac{1}{k^3}$ converge (serie p), entonces $\tan^3\left(\frac{1}{k}\right)$ también converge.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!^2}$

Solución: En el caso de factoriales, es recomendable partir por el criterio de la razón (para que se eliminen). En este caso, entonces, se tiene que:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{(2(n+1))!}{(n+1)!^2}}{\frac{(2n)!}{n!^2}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2}}{\frac{(2n)!}{n!^2}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = 4 > 1$$

Como el límite es mayor que 1, entonces por el criterio de la razón la serie diverge.

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n^2}}{n!}$

Solución: Usando el criterio de la razón, se tiene que:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{2^{(n+1)^2}}{(n+1)!}}{\frac{2^{n^2}}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n+1}}{n+1} = 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{4^n}{n+1} = 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{4^n \cdot \ln(4)}{1+0} = \infty$$

Como el límite es infinito (se aplicó L'Hôpital en el último paso), por el criterio de la razón la serie diverge.

d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n^p}\right)}{\ln(n)}$; $p > 0$

Solución: Se asume $p > 0$. Ya es conocido que cuando $n \to \infty$, $\sin\left(\frac{1}{n^p}\right) \approx \frac{1}{n^p}$. De esta forma $\frac{\sin\left(\frac{1}{n^p}\right)}{\ln(n)}$ se comporta como $\frac{1}{n^p \ln(n)}$ en el infinito.

Usemos el criterio de comparación al límite y comparemos ambas series.

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sin\left(\frac{1}{n^p}\right)}{\ln(n)}}{\frac{1}{n^p \ln(n)}} = 1$$

Como el límite es finito, el criterio de comparación al límite nos dice que ambas series se comportan de forma similar. Es decir, si $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \ln(n)}$ converge, entonces $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n^p}\right)}{\ln(n)}$ también converge. Estudiemos la convergencia de $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \ln(n)}$.

Notemos que para $n \geq 3$ se tiene que:

$$n^p \ln(n) \geq n^p \qquad \to \qquad \frac{1}{n^p \ln(n)} \leq \frac{1}{n^p}$$

Luego,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \ln(n)} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

Así, por criterio de comparación, la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \ln(n)}$ converge si la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge. Esta última, por ser una serie del tipo p converge siempre y cuando $p > 1$. Entonces, la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \ln(n)}$ converge **al menos** para $p > 1$. Si queremos ahondar más en el estudio, veamos qué ocurre si $p \leq 1$.

Si $p = 1$ se tiene la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)}$ la cual diverge (realice criterio de la integral, haga sustitución y encontrará que la serie diverge).

Si $0 < p < 1$ se tiene que $n^p < n$ para todo $n \geq 1$. De esta forma,

$$n^p \ln(n) < n \ln(n) \qquad \to \qquad \frac{1}{n^p \ln(n)} > \frac{1}{n \ln(n)}$$

Luego,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)} < \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \ln(n)}$$

Ahora, como $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$ diverge, entonces por criterio de comparación se tiene que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \ln(n)}$ también diverge.

Finalmente, la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n^p}\right)}{\ln(n)}$ converge para valores de $p > 1$.

e) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$; $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = \frac{2+\cos(n)}{\sqrt{n}} a_n$

Solución: Usemos el criterio de la razón. Se tiene que $a_{n+1} = \frac{2+\cos(n)}{\sqrt{n}} a_n$, por lo que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2+\cos(n)}{\sqrt{n}}$. Así,

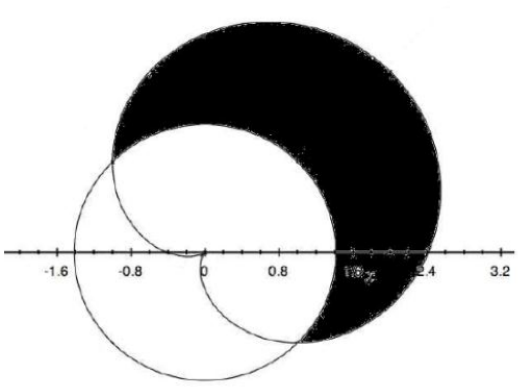
$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2+\cos(n)}{\sqrt{n}} \right| = 0 < 1$$

Como el límite es menor que 1, entonces por criterio de la razón la serie converge.

Problema 19. A partir de la región R acotada por $\rho(\theta) = \sqrt{2} + \cos(\theta) + \sin(\theta)$ y exterior al círculo $\rho(\theta) = \sqrt{2}$, determine:

a) El área de la región R.

Solución: El gráfico de la situación expuesta está representada a continuación. Representa un círculo centrado en el origen y un cardioide rotado.



Para poder encontrar el área de la región descrita debemos encontrar la intersección de las curvas. Para ello igualamos el círculo con el cardioide.

$$\begin{aligned} \sqrt{2} + \cos(\theta) + \sin(\theta) &= \sqrt{2} \\ \cos(\theta) &= -\sin(\theta) \\ \tan(\theta) &= -1 \end{aligned}$$

Dada nuestra situación, los valores de θ que satisfacen la ecuación son $\frac{3\pi}{4}$ y $\frac{7\pi}{4}$

Podríamos pensar que debemos integrar entre $\frac{7\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$, sin embargo esto es erróneo. Lo que sí podemos hacer es decir que ese $\frac{7\pi}{4}$ es en realidad su equivalente $-\frac{\pi}{4}$. Por lo tanto nuestro segmento de integración es $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$. Usando la fórmula de área en polares se tiene que:

$$A = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \rho_{ext}^2 - \rho_{int}^2(\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\sqrt{2} + \cos(\theta) + \sin(\theta))^2 - (\sqrt{2})^2(\theta)\mathrm{d}\theta$$

Resolviendo la integral se llega a:

$$A = 4 + \frac{\pi}{4}$$

Nótese que también nos pudimos haber dado cuenta de que la figura era simétrica con respecto al eje $\theta = \frac{\pi}{4}$. Bajo esta observación, pudimos haber dicho que el área total encerrada entre el cardioide y el círculo está determinada por el doble del área entre $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$.

b) Una expresión que represente el largo de la porción de curva que se ubica dentro del círculo.

Solución: Ya que sabemos cuáles son los puntos de intersección de las curvas, podemos determinar el largo de curva de la porción del cardioide dentro de la circunferencia. La fórmula de largo de curva en coordenadas polares está dada por:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2}\mathrm{d}\theta$$

Se tiene que:

$$\rho(\theta) = \sqrt{2} + \cos(\theta) + \sin(\theta)$$
$$\rho(\theta)^2 = 2 + \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) + 2\sqrt{2}\cos(\theta) + 2\sqrt{2}\sin(\theta) + 2\sin(\theta)\cos(\theta)$$
$$\rho'(\theta) = \cos(\theta) - \sin(\theta)$$
$$\rho'(\theta)^2 = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) - 2\cos(\theta)\sin(\theta)$$

$$\sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2} = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}\cos(\theta) + 2\sqrt{2}\sin(\theta)}$$

Luego el largo L queda determinado por la siguiente expresión:

$$L = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \sqrt{4 + 2\sqrt{2}\cos(\theta) + 2\sqrt{2}\sin(\theta)}\mathrm{d}\theta$$

c) Si hacemos girar la porción de curva dentro del círculo en torno a la recta $x+y = 3$, determine la cantidad de pintura necesaria para pintar el sólido generado si su rendimiento es de 2 galones por metro cuadrado. Suponga que las unidades de área obtenidas están en metros cuadrados.

Solución: Es muy fácil encontrar la superfice de revolución con el teorema de Pappus. Para ello debemos encontrar en primer lugar el centro de masa de esta porción de curva. Debido a la simetría de la curva, el centro de masa se ubica en el origen: $(\overline{x}, \overline{y}) = (0, 0)$.

Luego, tenemos que la distancia del centro de masa $(\overline{x}, \overline{y}) = (0, 0)$ a la recta $x + y = 3$, calculándola mediante el teorema de Pitágoras es $d = \frac{3}{\sqrt{2}}$. Observe que también se pudo haber obtenido con la fórmula siguiente:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Ahora, usando Pappus, el **manto** de revolución está dado por:

$$S_m = 2\pi \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot L = \frac{6}{\sqrt{2}}\pi L$$

Como queremos pintar el sólido generado, debemos considerar las *tapas*. Por esta razón debemos sumar las áreas de las circunferencias tapas. Debido a la simetría del dibujo, tenemos que el radio de giro de estas tapas es igual a d. De este modo, la superficie total está dada por:

$$S_T = \underbrace{S_m}_{manto} + \underbrace{\pi d^2}_{tapa1} + \underbrace{\pi d^2}_{tapa2}$$

$$S_T = \frac{6}{\sqrt{2}}\pi L + 9\pi$$

La cantidad de pintura necesaria es:

$$\text{Cantidad} = \text{Rendimiento} \cdot S_T = 2\frac{gal}{m^2} \cdot \left(\frac{6}{\sqrt{2}}\pi L + 9\pi\right) m^2$$

$$\text{Cantidad} = 6\pi(3 + \sqrt{2}L)gal$$