1.a) $f(x,y) = \cos^2(mx+ny)$

- $f_x(x,y) = -2m\cos(mx+ny)\operatorname{sen}(mx+ny)$
- $f_y(x,y) = -2n\cos(mx+ny)\operatorname{sen}(mx+ny)$

Como las funciones trigonometricas son continuas, sabemos que $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$, luego

- $f_{xx}(x,y) = -2m(-m\operatorname{sen}^2(mx+ny) + m\cos^2(mx+ny)$
  $= 2m^2(\cos^2(mx+ny) - \operatorname{sen}^2(mx+ny))$
- $f_{yy}(x,y) = 2n^2(\cos^2(mx+ny) - \operatorname{sen}^2(mx+ny))$
- $f_{xy}(x,y) = 2mn(\cos^2(mx+ny) - \operatorname{sen}^2(mx+ny))$

1.b) $f(x,y) = e^{xe^y}$

- $f_x(x,y) = e^y e^{xe^y} = e^{xe^y+y}$
- $f_y(x,y) = e^{xe^y} \cdot xe^y = xe^{xe^y+y}$

Por continuidad de euler sabemos que $f_{xy} = f_{yx}$

- $f_{xx}(x,y) = e^y e^{xe^y+y} = e^{xe^y+2y}$
- $f_{yy}(x,y) = xe^{xe^y+y} \cdot (xe^y+1)$
- $f_{xy}(x,y) = e^{xe^y+y} = e^{xe^y+y}(xe^y+1)$

2) Para aproximar utilizamos la ecuacion del punto tangente

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Calculamos las derivadas

$$f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x + e^{3y}} = \frac{1}{2\sqrt{x + e^{3y}}}$$

$$f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x + e^{3y}} = \frac{3e^{3y}}{2\sqrt{x + e^{3y}}}$$

Luego

$$f_x(3,0) = \frac{1}{2\sqrt{3+1}} = \frac{1}{4} \quad , \quad f(3,0) = \sqrt{3+1} = 2$$

$$f_y(3,0) = \frac{3}{2\sqrt{3+1}} = \frac{3}{4}$$

Reemplazando tenemos que

$$z - 2 = \frac{1}{4}(x - 3) + \frac{3}{4}y$$

$$z = \frac{x}{4} - \frac{3}{4} + \frac{3}{4}y + 2$$

Finalmente

$$f(2.9, 0.1) \approx \frac{2.9}{4} - \frac{3}{4} + \frac{0.3}{4} + 2$$

$$= \frac{0.2}{4} + \frac{8}{4} = \frac{8.2}{4}$$

3.a) Necesitamos primero las derivadas

- $f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\log(x^2y) + x\cos(y^2-1)\right)$

$$= \frac{2}{x} + \cos(y^2-1)$$

- $f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\log(x^2y) + x\cos(y^2-1)\right)$

$$= \frac{1}{y} - 2xy\,\text{sen}(y^2-1)$$

Evaluando

$f_x(1,1) = 2 + \cos(0) = 3$, $f(1,1) = 0 + \cos(0) = 1$

$f_y(1,1) = 1 - 2\text{sen}(0) = 1$

Reemplazando obtenemos que

$$z - z_0 = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$z - 1 = 3(x-1) + y - 1$$

$$z = 3x - 3 + y$$

$$3x + y - z = 3$$

3.b) Aproximamos a través del plano tangente

$$f(1.1, 0.9) \approx 3 \cdot 1.1 - 3 + 0.9$$

$$= 3.3 - 3 + 0.9$$

$$= 1.2$$

4) Recordemos que en la ayudantia anterior llegamos a

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_y(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5 - 4x^3y^3 - xy^4}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Utilizamos la definición de derivada

$$f_{xy}(x,y) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f_x(0,h) - f_x(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{-h^5/h^4}{h} = -1$$

$$f_{yx}(x,y) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{h^5/h^4}{h} = 1.$$