Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
MAT1620 – Cálculo II
Segundo Semestre 2025

Ayudantía 6

Planos y Vectores

Problema 1

Demuestre las siguientes identidades para $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$:

1. **Producto triple escalar:**

$$a \cdot (b \times c) = \det \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

2. **Producto triple vectorial o regla BAC-CAB:**

$$a \times (b \times c) = b(a \cdot c) - c(a \cdot b)$$

3. **Identidad de Jacobi:**

$$a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0$$

4. **Producto escalar de dos productos cruzados:**

$$(a \times b) \cdot (c \times d) = \begin{vmatrix} a \cdot c & a \cdot d \\ b \cdot c & b \cdot d \end{vmatrix}$$

5. **Identidad de Lagrange**:

$$||a||^2 \, ||b||^2 = (a \cdot b)^2 + ||a \times b||^2$$

Problema 2

1. Encuentre el ángulo agudo entre las curvas $y = x^{\frac{1}{2}}$ y $y = x^{\frac{1}{3}}$ en el punto $(1, 1)$.
2. Encuentre el ángulo entre los vectores $3i - 2j + k$ y $-j - 8k$.

Problema 3

a) Determine la ecuación del plano que es perpendicular a la recta dada por la intersección de los planos

$$3x - 2y + z = 7, \qquad x + y + 2z = 5,$$

y que pasa por el punto $(1, -1, 0)$.

b) Halle la ecuación del plano que contiene a la recta de intersección de los planos

$$2x - y + z = 4, \quad \text{y} \quad x + 4y - z = -3,$$

y que es paralelo a la recta de intersección de los planos

$$x - 2y + 3z = 1, \quad \text{y} \quad 2x + y - z = 6.$$

Problema 4

Determine y grafique el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} - \sqrt{1 - y^2}$

b) $g(x, y) = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$

c) $h(x, y) = \frac{\sqrt{y - x^2}}{1 - x^2}$

Problema 5* (Propuesto)

Considere la esfera

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 9,$$

y el plano

$$2x - y + 2z = 5.$$

a) Determine si el plano corta, es tangente o no intersecta a la esfera. Justifique.

b) En caso de haber intersección, describa geométricamente la curva y encuentre su centro y radio.

c) Halle la recta que pasa por el punto $P = (1, 0, 2)$ y es perpendicular al plano dado.

d) Calcule el ángulo entre dicha recta y la recta tangente a la curva de intersección en el punto más cercano a P.