Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
MAT1620 - Cálculo II - Sección 2 - 2014-02
Profesor: José López

Ayudantía II

Trabajo y Paramétricas

Ayudante: Daniel Araya - dtaraya@uc.cl

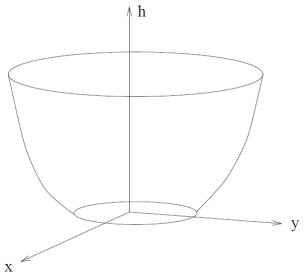
Problemas

OBSERVACIÓN: En todos los problemas se utilizará $g = 1$ por facilidad de cálculos. ☺

Problema 1 (I1-2012-2)

Calcular el trabajo necesario para vaciar un balde lleno de parafina. La forma del balde en coordenadas espaciales (x, y, z) es

$$h = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - 1, \qquad h \in [0, 1]$$



Así la sección transversal perpendicular al eje $\vec{h}$ altura dada d es el área encerrada por la curva $d + 1 = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}$ sobre un plano cartesiano en coordenadas (x, y). Asuma que la parafina tiene densidad constante $\frac{1}{4\pi}$. *Hint útil: El área encerrada por una elipse con semiejes a y b es: πab*

Solución:
Tal como indica el enunciado, debemos vaciar el balde, para esto usemos notación infitesimal: Primero debemos imaginarnos cual sería el trabajo necesario para vaciar cada segmento de área perpendicular al eje $\vec{h}$, es decir, $A(h)\,dh$ con $A(h)$ el área encerrada por la curva $d+1=\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}$ para un $d=h$ en particular. Notemos que:

$$\begin{aligned} d+1 &= \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4} \\ \leftrightarrow \quad 1 &= \frac{x^2}{9(d+1)}+\frac{y^2}{4(d+1)} \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} A(h) &= \pi(3\sqrt{h+1})(2\sqrt{h+1}) \\ &= 6\pi(h+1) \end{aligned}$$

Luego es evidente que el trabajo realizado por cada segmento es:

$$dW=\frac{1}{4\pi}\cdot(1-h)\cdot 6\pi(h+1)dh$$

Finalmente todo se reduce en resolver la integral

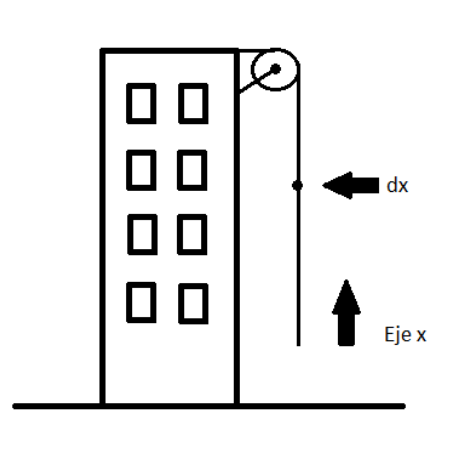
$$W=\int_0^1 \frac{3}{2}(1-h^2)\,dh$$

Concluyendo lo pedido que W=1. ■

Problema 2

Una cadena de 50 mt de longitud cuelga desde el techo de un edificio y pesa $1{,}5\frac{Kg}{m}$. ¿Cuanto trabajo se debe realizar para subir la cadena a la zotea del edificio?. *Observación: la cadena no alcanza a tocar el suelo.*

Solución:
Al igual que el ejercicio anterior, usemos notación infitesimal. La situación planteada es la siguiente:



Notemos que a medida vamos recogiendo la cadena, el peso va disminuyendo (por lo cual, no es evidente el cálculo del trabajo total). Es por esto que para resolver el problema usaremos el siguiente razonamiento: Usaremos el principio de *el trabajo total es la suma de todos los trabajos*, así veremos el trabajo que se debe realizar para cada partícula dx que compone a la cadena. Vemos que:
- La particula que se encuentra a los 30 metros debe subir 30 metros.
- La particula que se encuentra a los 29 metros debe subir 29 metros.
- $\cdots$

De este proceso iterativo es fácil notar que cada partícula dx el trabajo dW a realizar es:

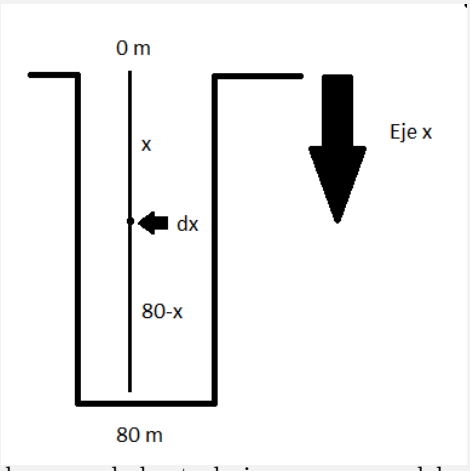
$$\begin{aligned} dW &= 1{,}5 \cdot dx \cdot (50 - x) \\ \Rightarrow W &= \int_0^{50} 1{,}5(50 - x)\, dx \\ &= 1{,}5 \left(50x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^{50} \\ &= 1{,}5 \frac{(50)^2}{2}. \end{aligned}$$

Luego se requiere un trabajo de $|W| = 1{,}5\dfrac{(50)^2}{2}$. Concluyendo lo pedido. ■

Problema 3

Se saca agua de un pozo de 80 m de profundidad y se sube una cubeta de 4 kg y una cuerda de $0{,}1\frac{kg}{m}$ (peso). La cubeta comienza con 40 L y luego se eleva a una altura de $2\frac{m}{min}$ pero pierde agua a una tasa de $0{,}2\frac{L}{min}$. ¿Cuál es el trabajo realizado en subir la cubeta?.

Solución:
Lo resolveré utilizando el otro sistema de referencia que comenté en ayudantía
La figura es la siguiente:



Usando el mismo principio de la suma de los trabajo, vemos que debemos calcular los siguiente:

- Trabajo de subir la cuberta vacía.
- Trabajo de subir la cuerda $\Leftrightarrow$ Trabajo de subir cada particula de la cuerda.
- Trabajo de subir el agua.

Trabajo de subir la cubeta vacía:
Trivialmente como la cubeta no sufre cambios cuando sube,

$$W_1 = 4 \cdot 80$$

Trabajo de subir la cuerda:
Con el mismo razonamiento del Problema 2 concluimos que:

$$\begin{aligned} dW_2 &= 0{,}1x\,dx \\ \Rightarrow W_2 &= \int_0^{80} 0{,}1x\,dx \\ &= 0{,}1\frac{(80)^2}{2} \end{aligned}$$

Trabajo de subir el agua:
El razonamiento que podemos aplicar es el siguiente: El agua se comporta como una partícula, pero variable (va disminuyendo). Por lo tanto la masa (o fuerza) es distinta en cada altura. Así conviene calcular cada dW_3 que se realiza en cada altura h (como si estuvieramos sacando una foto cada cierto avance dh que realizamos). De esto, como 1L de agua = 1Kg de agua vemos la masa m_{H_2O} para una altura x es:

$$\begin{aligned} m_{H_2O}(x) &= Total - Perdido \\ &= 40 - (80 - x)\frac{0{,}2}{2} \\ &= 32 + \frac{x}{10} \end{aligned}$$

Como $W_3 = \int m(x)dx$

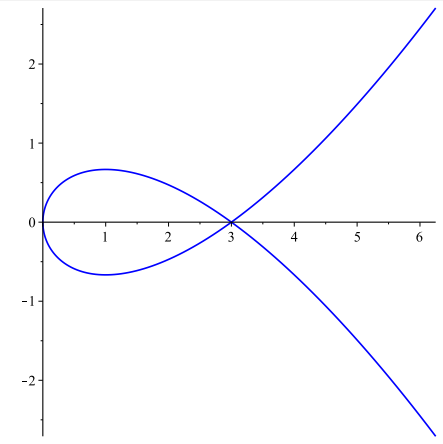
$$\begin{aligned} W_3 &= \int_0^{80} 32 + \frac{x}{10}\,dx \\ &= 32 \cdot 80 + \frac{1}{10} \cdot \frac{(80)^2}{2} \end{aligned}$$

Finalmente $W_t = W_1 + W_2 + W_3$.
Concluyendo lo pedido. ■

Problema 4 (Clásico)

Esbozar el gráfico de la curva $x = t^2$; $y = t - t^3/3$ y hallar el área del lazo que esta forma.

Solución:
Dandonos unos cuantos valores concluiremos que la figura es:



Debemos determinar entre qué valores se da aquel *loop*. Para esto simplemente viendo la figura notamos que debemos encontrar los valores de t tales que $y = 0$:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 0 = y - y^3/3 \\ &\Leftrightarrow y = 0 \vee y = -\sqrt{3} \vee y = \sqrt{3} \end{aligned}$$

Luego claramente formamos el *loop* barriendo t entre: $t \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$. Además notamos que la orientación del *loop* es *positiva*, pues se forma en sentido de la manecillas del reloj (Proviene de arriba, para luego formar el *loop* y continuar hacia abajo).
Esto quiere decir que finalmente el área del loop es:

$$\begin{aligned} A &= \int f(x)\,dx \\ A &= \int y\,\frac{dx}{dt}\,dt \\ \Rightarrow A &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(t - \frac{t^3}{3}\right) \cdot 2t\,dt \\ &= 2\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(t^2 - \frac{t^4}{3}\right) dt \\ &= \frac{2}{3}\left(t^3 - \frac{t^5}{5}\right)\Big|_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \\ &= \frac{8\sqrt{3}}{5} \end{aligned}$$

Concluyendo lo pedido. ■

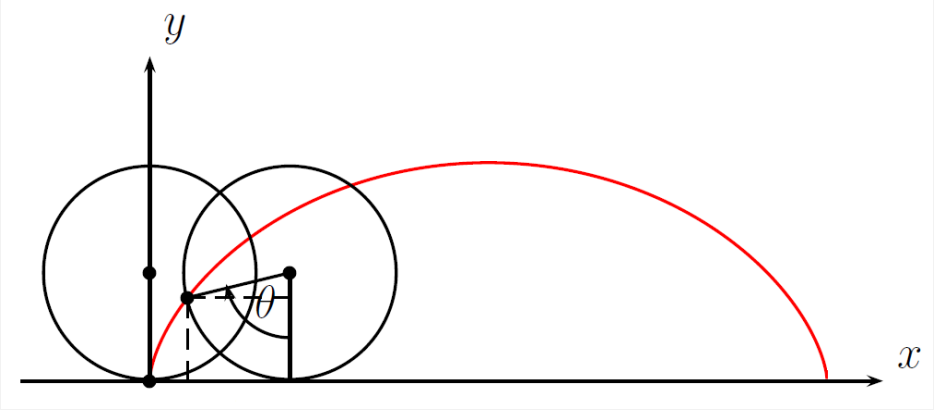
Problema 5

El cicloide es la curva en el plano que resulta de trazar siguiendo un punto único de un círculo cuando rueda sin resbalar a lo largo de una recta.

a) Encuentre la parametrización que describe al cicloide, el circulo (y el punto) parte en el origen y rueda a lo largo del eje x.

b) Halle el volumen resultante de realizar una revolución entorno al eje x.

Solución:
La figura es la siguiente:



a) Primero, de la figura notemos que a medidas que gira el circulo, el punto con el radio forman un triangulo de angulo θ que evoluciona con el tiempo. Con este triagulo podemos construir las componentes x e y:
La más fácil es la componente x, pues como rueda sin resbalar, justamente lo que habrá avanzado horizontalmente será el largo del arco de angulo θ del circulo, restandole el cateto opuesto a θ, es decir $r\sin(\theta)$:.

$$\Rightarrow x = r\theta - r\sin(\theta)$$

Luego la componente y es simplemente el radio de la circunferencia más o menos el cateto adyacente a θ. Eso se expresa como:

$$y = r - r\cos(\theta).$$

b) Por método de los Discos:

$$V = \int \pi f^2(x)\, dx$$

Como $dx = \dfrac{dx}{d\theta} d\theta$ y $x' = r - r\cos(\theta)$:

$$V = \int_0^{2\pi} \pi(r - r\cos(\theta))^2 \cdot (r - r\cos(\theta))\, d\theta$$
$$V = \pi r^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos(\theta))^3\, d\theta$$
$$V = \pi r^3 \int_0^{2\pi} \left(1 - 3\cos(\theta) + 3\cos^2 + \cos^3\right)\, d\theta$$
$$V = \ldots \qquad \textit{Jueguen!}$$
$$V = 4\pi r^3$$