1.a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\ln(k)^2}$. Se resolverá por criterio de la integral. Notemos que

$$f(x) = \frac{1}{x\ln(x)^2}$$

Es continua y decreciente en el intervalo $(1, \infty)$ por lo que es valido aplicar el criterio.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\ln(x)^2} = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{dx}{x\ln(x)^2} \quad \left| \begin{array}{l} u = \ln(x) \\ du = \frac{dx}{x} \end{array} \right.$$

$$= \lim_{t\to\infty} \int_0^{\ln(t)} \frac{du}{u^2}$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{du}{u^2} \rightarrow \text{DIVERGE}$$

Integral de tipo 1 y 2. Por criterio "p" la integral diverge, por ende la serie tambien. //

1.b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2+1}$. Notar que la sucesión es similar a $\frac{1}{k}$. Por lo que se sospecha que divergerá.

$$\frac{k}{k^2+1} \geq \frac{k}{2k^2} = \frac{1}{2k} \rightarrow \sum \frac{1}{k} \text{ DIVERGE!!}$$

Luego como $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge. Sabemos que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2+1}$ tambien. //

1.c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{9^k}{3+10^k}$. Notamos que es similar a una geometrica. Por lo que sospechamos que converge

$$\frac{9^k}{3+10^k} \leq \frac{9^k}{10^k} = (0.9)^k \rightarrow \sum (0.9)^k \text{ CONVERGE!!}$$

Luego, la serie converge. //

1.d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{k}}{\sqrt{k^3+4k+3}}$. Veamos el grado de la fracción.

grados máximos $\rightsquigarrow \frac{\sqrt[3]{k}}{\sqrt{k^3}} = \frac{k^{\frac{1}{3}}}{k^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{k^{7/6}}$

Como $\frac{7}{6} > 1$, por criterio "p" sospechamos que la serie convergerá.

$$\frac{\sqrt[3]{k}}{\sqrt{k^3+4k+3}} \leq \frac{\sqrt[3]{k}}{\sqrt{k^3}} = \frac{1}{k^{7/6}} \rightarrow \sum \frac{1}{k^{7/6}} \text{ CONVERGE!}$$

Luego la serie converge. //

2.a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+3^k}$. Notamos que es similar a la geometrica, por lo que se sospecha que convergera.

$$\frac{1}{k+3^k} \leq \frac{1}{3^k} = \left(\frac{1}{3}\right)^k \rightarrow \sum \left(\frac{1}{3}\right)^k \text{ CONVERGE!!!}$$

Luego la serie converge, al ser positiva tambien converge absolutamente. //

2.b) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{k^2+2}$. Notemos que

$$\frac{k}{k^2+2} \geq \frac{k}{3k^2} = \frac{1}{3k} \rightarrow \sum \frac{1}{k} \text{ DIVERGE!!!}$$

Luego la serie en valor absoluto ($\sum \frac{k}{k^2+2}$) diverge. Comprobemos su convergencia condicional.

i) tomamos $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$, veamos que es decreciente.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x^2+2}\right) = \frac{2-x^2}{(2+x^2)^2}$$

Luego es decreciente para $k \geq 2$.

ii) tomando limite de la misma funcion veamos que converge a 0.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x^2}} = 0.$$

Como la sucesion es monotona decreciente y converge a 0. su serie alternante converge. Luego converge convencionalmente. //

2.c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k k^2}{k!}$. Al contener un factorial, nos conviene hacer el criterio del cociente.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{3^{k+1}(k+1)^2}{(k+1)!}}{\frac{3^k k^2}{k!}}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{3^{k+1}(k+1)^2}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{3^k k^2}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{3(k+1)^2}{(k+1)k^2}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{3k+3}{k^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{3}{k} + \frac{3}{k^2} = 0 < 1$$

Luego la serie converge absolutamente. //

2.d) $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-k^3}$. Resolvamos con criterio de la integral. Primero comprobemos que

$$f(x) = x^2 e^{-x^3}$$

es decreciente y continua en el intervalo $(1, +\infty)$.

$$\frac{d}{dx} x^2 e^{-x^3} = e^{-x^3}(2x - 3x^4)$$

Lo cual es negativo para $x \geq 1$. Luego es valido ocupar el criterio.

$$\int_1^{\infty} x^2 e^{-x^3} dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t x^2 e^{-x^3} dx \quad \left| \begin{array}{l} u = x^3 \\ du = 3x^2 dx \end{array} \right.$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{3} \int_1^{t^3} e^{-u} du$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{3} \left(-e^{-u} \Big|_1^{t^3} \right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(e^{-1} - \lim_{t\to\infty} e^{-t^3} \right) = \frac{1}{3e} < \infty$$

Luego la serie converge absolutamente.

2.g) $\sum_{k=1}^{\infty} k \operatorname{sen}\left(\frac{1}{k}\right)$. Notemos lo siguiente

$$\lim_{k\to\infty} k \operatorname{sen}\left(\frac{1}{k}\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{k}\right)}{\frac{1}{k}} \quad \Big| \; u = \tfrac{1}{k}.$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen}(u)}{u} = 1$$

Luego, como la sucesión no converge a 0. su serie diverge.

2.h) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}$. Utilicemos el criterio de la raiz

$$\lim_{k\to\infty} |a_k|^k = \lim_{k\to\infty} \left(\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}\right)^{\frac{1}{k}}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{\frac{k+1}{k}}\right)^{k}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}} = \frac{1}{e} < 1$$

Luego la serie converge absolutamente.

3) Notemos que $\lim_{k\to\infty} k a_k = \lim_{k\to\infty} a_k / \frac{1}{k}$. lo cual asemeja a un criterio de comparacion al limite. Como $a_k > 0$ sabemos que el limite es positivo. Tenemos dos casos:

i) $\lim_{k\to\infty} k a_k = C > 0$. Luego como $\sum \frac{1}{k}$ diverge, por criterio de comparacion al limite $\sum a_k$ tambien converge.

ii) $\lim_{k\to\infty} k a_k \to +\infty$. Esto indica que $a_k > \frac{1}{k}$ en el limite. por lo que, por lo que $\sum a_k$ diverge peor que $\sum \frac{1}{k}$.

4) Notemos que si $K = 1$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(Kn)!} = \sum_{n=1}^{\infty} n! \to \text{DIVERGE}$$

Analicemos cuando $K > 1$. Al contener factoriales, conviene ocupar criterio del cociente.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)!)^2}{(Kn+K)!} \frac{(Kn)!}{(n!)^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(Kn)!}{(Kn+K)!} \cdot \left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)^2$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(Kn+1)\cdot\ldots\cdot(Kn+K)}$$

esto es menor que $(Kn+1)$ para $K > 1$

esto es menor que $(Kn+K)$ para $K > 1$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+1)}{(Kn+1)\cdot\ldots\cdot(Kn+K)}$$

$$< \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

Luego, con $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$ para $K > 1$. Concluimos que para $K > 1$ la serie converge. //

5) Comprobemos esto pos el criterio de comparación al limite. Es decir, resolver el siguiente limite.

$$\lim_{K\to\infty} \frac{e^{a_K} - 1}{a_K}$$

Supongamos que $\sum a_K$ converge, esto implica que $\lim_{K\to\infty} a_K = 0$. Luego, hay dos formas de resolver este limite.

Forma 1: limite notable, Realizamos el cambio de variable $u = a_K$, si $K \to \infty$ entonces $a_K = u \to 0$.

$$\lim_{u\to 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1$$

Forma 2: L'Hôpital, Sea f derivable tal que $f(k) = a_k$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{k\to\infty} a_k = 0$. Resolvamos el limite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{f(x)} - 1}{f(x)} \quad \left(\frac{e^{f(x)}-1}{f(x)} \to \frac{0}{0}\right)$$

L'Hôpital

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)\, e^{f(x)}}{f'(x)} = \lim_{x\to\infty} e^{f(x)} = 1$$

como el limite resulto en una constante positiva sabemos que si la serie de a_k converge, entonces la serie de $(e^{a_k} - 1)$ tambien. //