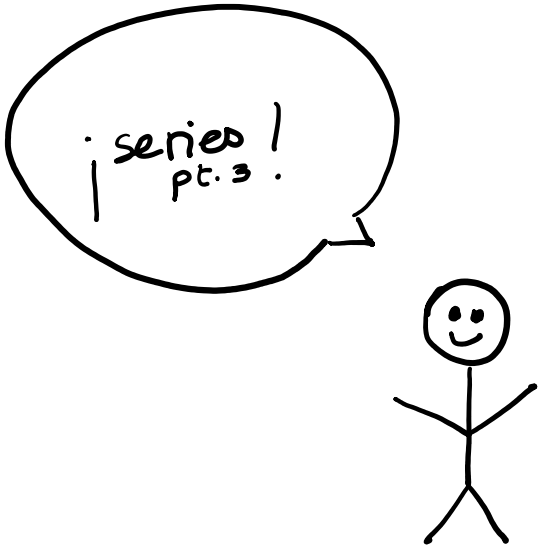
Ayudantía 5

isabel.kreimerman@gmail.com



Problema 1

Determine el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de la serie.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n\sqrt{n}} x^n$

b) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{4^n \ln n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n}(x+1)^n$

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n\sqrt{n}} x^n$ Usamos el criterio de la razon:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

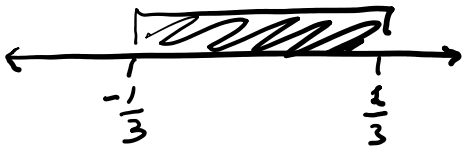
$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-3)^{n+1} x^{n+1}}{(n+1)\sqrt{n+1}} \cdot \frac{n\sqrt{n}}{(-3)^n x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-3)\, x\, n^{3/2}}{(n+1)^{3/2}} \right|$$

$$= 3|x|$$

para que converja: $3|x| < 1$

$|x| < \frac{1}{3}$

$\therefore$ radio $= \frac{1}{3}$



¿que pasa en $x = \frac{1}{3}$ o $x = -\frac{1}{3}$

$x = \frac{1}{3} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$

converge

(criterio alternante)

$x = -\frac{1}{3} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$

converge

(p-series)

$\therefore$ intervalo es $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$

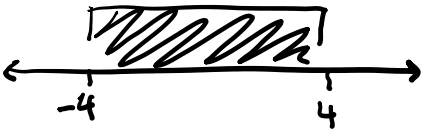
b) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{4^n \ln(n)}$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{4^{n+1} \ln(n+1)} \cdot \frac{4^n \ln(n)}{(-1)^n x^n} \right| = \frac{|x|}{4}$$

para que sea convergente

$$\frac{|x|}{4} < 1$$

$$|x| < 4 \longrightarrow \text{radio} = 4$$



¿Qué pasa en $x = -4$ ∧ $x = 4$?

$x = 4 \longrightarrow \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}}$ convergente (criterio alternante)

$x = -4 \longrightarrow \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}}$ divergente (prueba de comparación)

∴ el intervalo de convergencia $(-4, 4]$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n} (x+1)^n$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)(x+1)^{n+1}}{4^{n+1}} \cdot \frac{4^n}{n(x+1)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)(x+1)}{4n} \right|$$

$$= \frac{|x+1|}{4}$$

para que converja $\frac{|x+1|}{4} < 1 \longleftrightarrow |x+1| < 4$

entonces → radio = 4

$$-4 < x+1 < 4 \iff -5 < x < 3$$

$x = -5 \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot n$ diverge

$x = 3 \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n$ diverge

∴ intervalo de convergencia

$(-5, 3)$

Problema 2

Suponga que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge cuando $x = -4$ y diverge cuando $x = 6$. ¿Qué puede decir con respecto a la convergencia o divergencia de la serie siguiente?

a) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n 8^n$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (-3)^n$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n 9^n$

Recordamos el siguiente teorema

3 Teorema Para una serie de potencias dada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n$ hay sólo tres posibilidades:

i) La serie converge sólo cuando $x = a$.

ii) La serie converge para toda x.

iii) Hay un número positivo R tal que la serie converge si $|x - a| < R$ y diverge si $|x - a| > R$.

Por lo que podemos afirmar que:

→ converge $\forall$ $-4 \leq x < 4$

→ diverge $\forall$ $x \geq 6 \wedge x < -6$

entonces

a) $x = 1$ $x \in$ intervalo en que converge $\therefore$ converge

b) $x = 8$ $x \in$ intervalo en que diverge $\therefore$ diverge

c) $x = -3$ $x \in$ intervalo en que converge $\therefore$ converge

d) $x = -9$ $x \in$ intervalo en que diverge $\therefore$ diverge

Problema 3

Encuentre una representación como serie de potencias para la función y determine el intervalo de convergencia.

a) $f(x) = \dfrac{x}{2x^2+1}$ b) $f(x) = \dfrac{x^2+x}{(1-x)^3}$

a) $f(x) = \dfrac{x}{2x^2+1}$ Notar que [1] $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad |x| < 1$

$$= x\left(\frac{1}{1-(-2x^2)}\right)$$

entonces la podemos expresar como

$$x\left(\frac{1}{1-(-2x^2)}\right) = x\sum_{n=0}^{\infty}(-2x^2)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^{2n+1}$$

y la serie converge cuando $|-2x^2| < 1$

$|x^2| < \frac{1}{2}$

entonces: $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $I = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

b) $f(x) = \dfrac{x^2+x}{(1+x)^3}$ Sabemos que

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

derivando $\frac{d}{dx}$

$$\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)n\,x^{n-1}$$

Así podemos expresar $f(x)$

$$f(x) = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{2}{(1-x)^3} + \frac{x}{2} \cdot \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$= \frac{x^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) n x^{n-1} + \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) n x^{n-1}$$

Reordenando

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n \qquad \text{con} \qquad R = 1$$

Problema 4

Evalúe la integral indefinida como una serie de potencias. ¿Cuál es el radio de convergencia?

$$\int x^2 \ln(1+x)\,dx$$

Sabemos que

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad \text{con} \quad |x|<1$$

Entonces

$$x^2\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n+2}}{n}$$

por lo que

$$\int x^2\ln(1+x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+3}}{n(n+3)} + C$$

y por teorema, los radios de convergencia son los mismos $\rightarrow R=1$

2 Teorema Si la serie de potencias $\Sigma\, c_n(x-a)^n$ posee un radio de convergencia $R>0$, entonces la función f definida por

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

es derivable (y, por tanto, continua) sobre el intervalo $(a-R, a+R)$ y

i) $$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$$

ii) $$\int f(x)\,dx = C + c_0(x-a) + c_1\frac{(x-a)^2}{2} + c_2\frac{(x-a)^3}{3} + \cdots$$

$$= C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

Los radios de convergencia de la serie de potencias en las ecuaciones i) y ii) son R.

Problema 5

Encuentre la serie de Maclaurin para $f(x)$ usando la definición de la serie de Maclaurin. Determine también el radio asociado con la convergencia.

$$f(x) = x\cos x$$

Recordando la serie de Maclaurin:

7 $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots$$

Entonces

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$x\cos x$	0
1	$-x\sin x + \cos x$	1
2	$-x\cos x - 2\sin x$	0
3	$x\sin x - 3\cos x$	-3
4	$x\cos x + 4\sin x$	0
5	$-x\sin x + 5\cos x$	5
6	$-x\cos x - 6\sin x$	0
7	$x\sin x - 7\cos x$	-7
⋮	⋮	⋮

$$x\cos(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots$$

$$= 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-3}{3!}x^3 + \cdots$$

$$= x - \frac{1}{2!}x^3 + \frac{1}{4!}x^5 - \frac{1}{6!}x^7$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n)!}$$

Para el radio

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+3}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(-1)^n x^{2n+1}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{(2n+2)(2n+1)}$$

$$= 0 < 1 \longrightarrow R = \infty$$

Problema 6

Calcule la serie de Taylor para $f(x)$ centrada en el valor dado de a. También encuentre el radio de convergencia asociado.

$$f(x) = \operatorname{sen} x, \quad a = \pi/2$$

Recordamos una serie de Taylor

6 $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$
$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

Entonces

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(\pi/2)$
0	$\sin x$	1
1	$\cos x$	0
2	$-\sin x$	-1
3	$-\cos x$	0
4	$\sin x$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{n!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^n$$

$$= \frac{1}{1}\left(x-\tfrac{\pi}{2}\right) + 0 - \frac{1}{2!}\left(x-\tfrac{\pi}{2}\right)^2 + 0 + \frac{1}{4!}\left(x-\tfrac{\pi}{2}\right)^4 \cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2k}}{(2k)!}$$

Para el radio

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2n+2}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(-1)^n\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2n}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left|x-\frac{\pi}{2}\right|^2}{(2n+2)(2n+1)} = 0 < 1 \ \forall x$$

$\therefore R = \infty$

e^x — Exponential Function

$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$ — Exponential Function (Taylor's Version)

(meme)

Problema 7

Evalúe la integral indefinida como una serie infinita.

$$\int x \cos\left(x^3\right) \mathrm{d}x$$

Sabemos que

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{con} \qquad R = \infty$$

entonces $$x\cos(x^3) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{6n+1}}{(2n)!}$$

Integrando

$$\int x\cos(x^3)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{6n+2}}{(6n+2)(2n)!} + C \qquad \text{con} \quad R = \infty$$