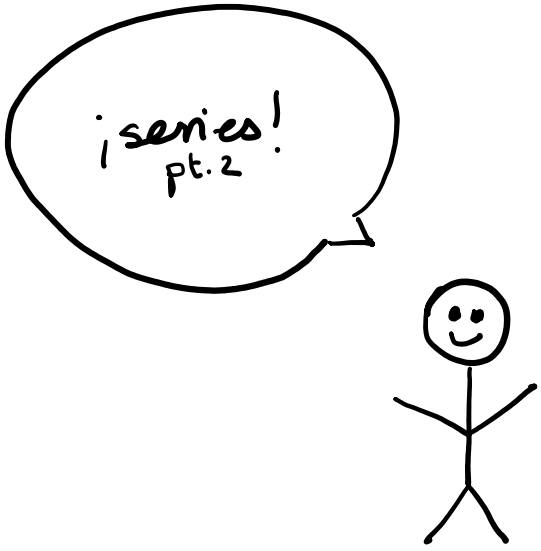
Ayudantía 4

isabel.kreimerman@gmail.com



1.

Determine si la serie es convergente o divergente.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{3+10^n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^4+1}}{n^3+n^2}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-5n}{n^3+n+1}$

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{3+10^n}$ Notar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{3+10^n} < \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{10^n}}_{\text{serie geométrica convergente}}$$

entonces, por criterio de comparación, la serie converge

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^4+1}}{n^3+n^2}$ Notar que

$$\frac{\sqrt{n^4+1}}{n^2(n+1)} > \frac{\sqrt{n^4}}{n^2(n+1)} = \frac{1}{n+1} \quad \forall n \geq 1$$

entonces

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}}_{\text{diverge (serie p)}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^4+1}}{n^3+n^2}$$

$\therefore$ la serie diverge por criterio de comparación

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-5n}{n^3+n+1}$ Usamos el criterio de comparación al límite

Criterio de Comparación del límite

Sean a_n y b_n de términos positivos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

- si $L = 0 \rightarrow b_n$ converge $\Rightarrow a_n$ converge
- si $L \neq 0 \rightarrow a_n$ y b_n tienen igual comportamiento
- si $L = \infty \rightarrow b_n$ diverge $\Rightarrow a_n$ diverge

entonces $a_n = \dfrac{n^2 - 5n}{n^3 + n + 1}$ $\quad b_n = \dfrac{1}{n}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^2(n-5)}{(n+1)(n^2-n+1)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \longrightarrow L \neq 0$$

por lo que se comportan igual

sabemos que b_n diverge

$\therefore$ la serie diverge

2.

Pruebe las series para ver si son convergentes o divergentes.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{2n+3}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} n e^{-n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{\pi}{n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{2n+3}$ Notar que:

$\frac{\sqrt{n}}{2n+3} > 0 \quad \forall\, n \geq 1 \longrightarrow$ positiva

Además

$\left(\frac{\sqrt{x}}{2x+3}\right)' = \frac{3-2x}{2\sqrt{x}(2x+3)^2} < 0 \quad \forall\, x > \frac{3}{2} \longrightarrow$ decreciente $\forall\, n \geq 2$

Además

$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n+3} = 0$

∴ serie converge por criterio de serie alternante

b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} n e^{-n}$ Notar que

$n e^{-n} > 0 \quad \forall\, n \geq 1 \longrightarrow$ positiva

Además

$(x e^{-x})' = e^{-x} + -x e^{-x} = e^{-x}(1-x) < 0 \quad \forall\, x > 1$

↳ decreciente

Además $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^n} = 0$

∴ converge por criterio de serie alternante

→ decreciente

Además $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^n} = 0$

∴ converge por criterio de serie alternante

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$

Notar que

$$\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) > 0 \quad \forall\, n \geq 2$$

↳ positiva

Además $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \geq \sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$

$a_n \geq a_{n+1} \longrightarrow$ decreciente

y también

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = 0$$

$\therefore$ converge por criterio de serie alternante

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

Notar que: $\dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{1} \cdot \dfrac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

$$= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$ } positivo $\forall\, n \geq 1$, decreciente

Además

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$$

$\therefore$ converge por criterio de serie alternante

3.

Determine si la serie es absolutamente convergente, condicionalemente convergente o divergente.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+4}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{(2n+1)!}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n^2+1}{2n^2+1})^n$

d) $\frac{2}{5}+\frac{2\cdot 6}{5\cdot 8}+\frac{2\cdot 6\cdot 10}{5\cdot 8\cdot 11}+\frac{2\cdot 6\cdot 10\cdot 14}{5\cdot 8\cdot 11\cdot 14}+\ldots$

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+4}$ Notar que

$\frac{n}{n^2+4} > 0 \quad \forall \quad n \geq 1$

Además

$\left(\frac{x}{x^2+4}\right)' = \frac{x^2+4-2x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{4-x^2}{(x^2+4)^2} < 0 \quad \forall \quad x > 2$

↳ decreciente

Además

$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+4} = 0$

$\therefore$ converge

PERO

¿converge absolutamente?

$\left|(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+4}\right| = \frac{n}{n^2+4}$ → usamos criterio al límite

$a_n = \frac{n}{n^2+4} \qquad b_n = \frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+4} = 1$ $\therefore$ ambas divergen

$\therefore$ la serie es condicionalmente convergente

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(2n+1)!}$ Usamos la prueba de la razón

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-3)^{n+1}}{(2n+3)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{(-3)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{(2n+3)(2n+2)}$$

$$= 0 < 1$$

∴ converge absolutamente

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{2n^2+1} \right)^n$ Usamos la prueba de la raíz

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| \left(\frac{n^2+1}{2n^2+1} \right)^n \right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{2n^2+1} = \frac{1}{2} < 1$$

∴ es absolutamente convergente

d) $\frac{2}{5} + \frac{2}{5}\cdot\frac{6}{8} + \frac{2}{5}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{10}{11} + \frac{2}{5}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{10}{11}\cdot\frac{14}{14} + [\cdots]$

Notar que lo podemos expresar como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{10}{11}\cdot\frac{14}{14}\cdot[\cdots]\cdot\frac{(4n-2)}{(3n+2)}$$

Usando la prueba de la razon:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{2\cdot 6\cdot 10\cdots(4n-2)(4n+2)}{5\cdot 8\cdot 11\cdot\cdots(3n+2)(3n+5)} \cdot \frac{5\cdot 8\cdot 11\cdot\cdots(3n+2)}{2\cdot 6\cdot 10\cdot\cdots\cdot(4n-2)} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4n+2}{3n+5} = \frac{4}{3} > 1$$

∴ la serie diverge