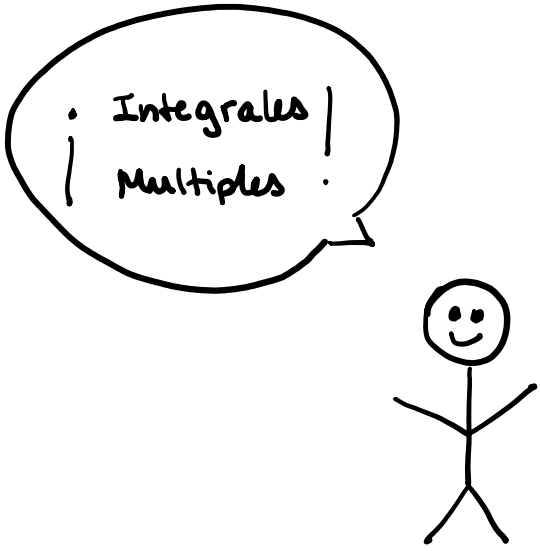
Ayudantía 12

isabel.kreimerman@gmail.com



Problema 1

Evalúe las siguientes integrales dobles.

1) $\iint_D \frac{y}{x^5+1} dA, \quad D = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant x^2\}$

2) $\iint_D y^2 e^{xy} dA, \quad D$ está acotada por $y = x, y = 4, x = 0$

3) $\iint_D y^2 dA, \quad D$ es la región triangular con vértices $(0,1)$, $(1,2)$ y $(4,1)$

4) $\iint_D xy^2 dA, \quad D$ está encerrada por $x = 0$ y $x = \sqrt{1-y^2}$

1) $\iint_D \frac{y}{x^5+1} dA$ con $D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq x^2\}$

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} \frac{y}{x^5+1} dy\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x^5+1} \cdot \left[\frac{y^2}{2}\right]\Big|_0^{x^2} dx$$

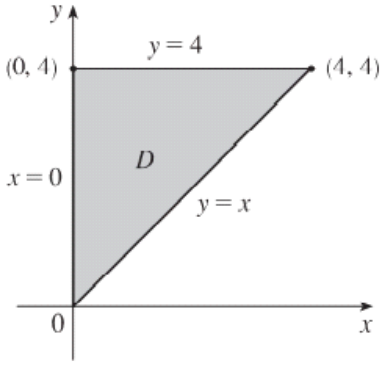
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^4}{x^5+1} dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \ln(x^5+1)\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{10}(\ln(2) - \ln(1))$$

$$= \frac{1}{10}\ln(2)$$

2) $\iint_D y^2 e^{xy} dA$ D acotada por $y = x, y = 4, x = 0$



podemos describir la región como

$D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq y, \ 0 \leq y \leq 4\}$

$D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 4, \ x \leq y \leq 4\}$

Usamos la primera porque es mas sencilla

$$\int_0^4 \int_0^y y^2 e^{xy}\, dx\, dy = \int_0^4 y\, e^{xy} \Big|_0^y \, dy$$

$$= \int_0^4 y e^{y^2} - y \, dy$$

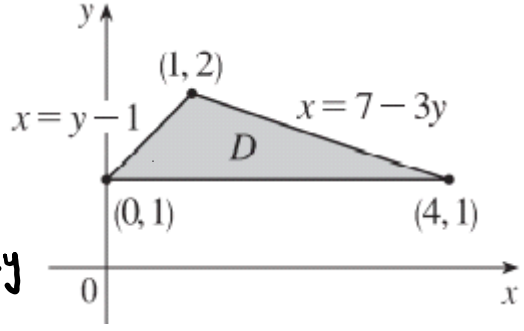
$$= \frac{1}{2} e^{y^2} \Big|_0^4 - \frac{y^2}{2} \Big|_0^4$$

$$= \frac{1}{2}(e^{16} - e^0) - \left[\frac{16}{2} - 0\right]$$

$$= \frac{1}{2}(e^{16} - 1) - 8$$

$$= \frac{1}{2} e^{16} - \frac{17}{2}$$

3) $\iint_D y^2\, dA$ D triangulo de vertices (0,1), (1,2), (4,1)



$$\int_1^2 \int_{y-1}^{7-3y} y^2\, dx\, dy = \int_1^2 y^2 x \Big|_{y-1}^{7-3y} \, dy$$

$$= \int_1^2 y^2 (7 - 3y - (y-1))\, dy$$

$$= \int_1^2 y^2 (8 - 4y)\, dy$$

$$= \int_1^2 8y^2 - 4y^3 \, dy$$

$$= \frac{8}{3} y^3 \Big|_1^2 - y^4 \Big|_1^2$$

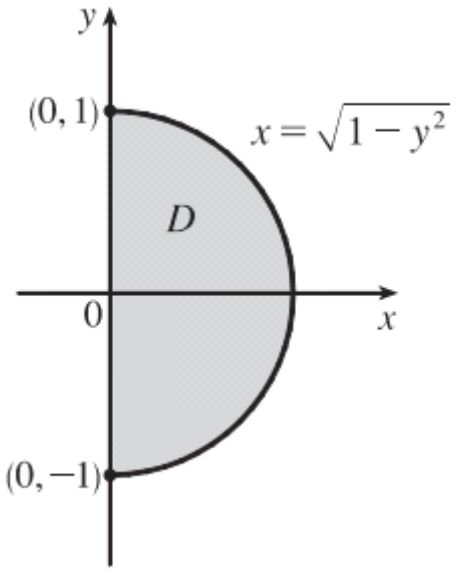
$$= \frac{8}{3}(8 - 1) - (16 - 1)$$

$$= \frac{56}{3} - 15$$

$$= \frac{56}{3} - \frac{45}{3}$$

$$= \frac{11}{3}$$

4) $\iint_D xy^2\,dA$ D encerrado por $x=0$ $x=\sqrt{1-y^2}$



$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} xy^2\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} y^2\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{1-y^2}}\,dy$$

$$= \int_{-1}^{1} y^2\cdot\frac{1-y^2}{2}\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} y^2 - y^4\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{y^3}{3}\Big|_{-1}^{1} - \frac{y^5}{5}\Big|_{-1}^{1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{5}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{10-6}{15}\right)$$

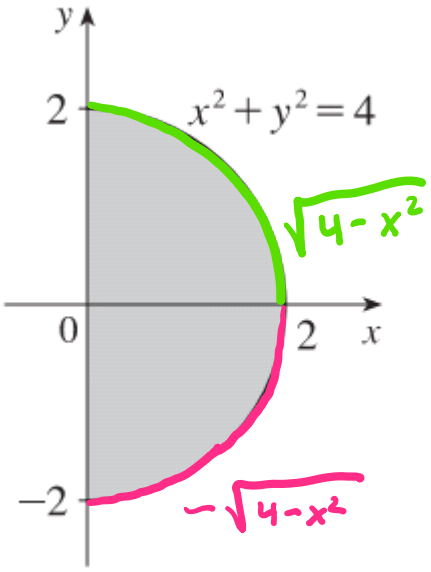
$$= \frac{4}{30}$$

$$= \frac{2}{15}$$

Problema 2

Bosqueje la región de integración y cambie el orden de integración.

$$\int_{-2}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dxdy$$



$$\int_{y=-2}^{y=2}\int_{x=0}^{x=\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$=$$

$$\int_{0}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$$

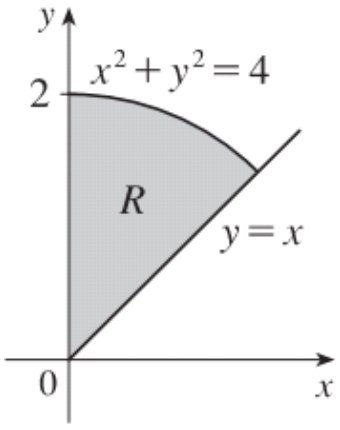
Problema 3

Evalúe la integral dada cambiando a coordenadas polares.

1) $\iint_R (2x - y)dA$, donde R es la región en el primer cuadrante encerrada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ y las rectas $x = 0$ $y = x$

2) $\iint_D e^{-x^2-y^2}dA$, donde D es la región acotada por la semicircunferencia $x = \sqrt{4 - y^2}$ y el eje y

1) $\iint_R (2x-y)\,dA$ donde R esta en el primer cuadrante encerrado por $x^2+y^2=4$, $x=0$, $y=x$



entonces en coordenadas polares

$$R = \{(r,\theta) \mid 0 \le r \le 2,\ \pi/4 \le \theta \le \pi/2\}$$

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^2 (2r\cos(\theta) - r\sin(\theta))\, r\, dr\, d\theta$$ (importante)

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^2 (2\cos(\theta) - \sin(\theta))\cdot r^2\, dr\, d\theta$$

como todos los límites de integración son numéricos y la expresión se puede factorizar:

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} 2\cos(\theta) - \sin(\theta)\, d\theta \cdot \int_0^2 r^2\, dr$$

$$= \left[2\sin(\theta)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} + \cos(\theta)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} \right] \cdot \left[\frac{r^3}{3}\Big|_0^2 \right]$$

$$= \left((2 - \sqrt{2}) + (0 - \frac{\sqrt{2}}{2}) \right) \cdot \frac{8}{3}$$

$$= \left(2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\frac{8}{3} = \frac{16}{3} - 4\sqrt{2}$$

2) $\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dA$ donde D esta acotado por la semicircunferencia $x=\sqrt{4-y^2}$ y el eje y

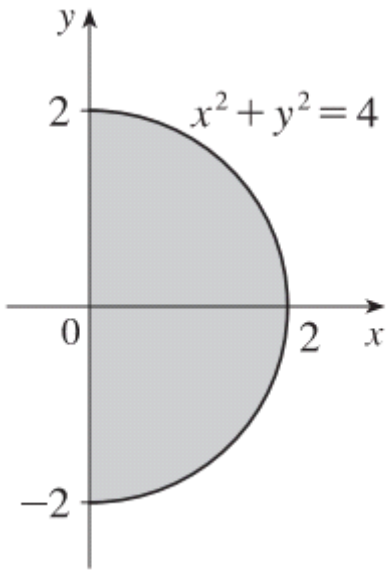
$$D=\{(r,\theta)\mid 0\le r\le 2,\ -\tfrac{\pi}{2}\le\theta\le\tfrac{\pi}{2}\}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2}\int_0^2 e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\cdot\int_0^2 e^{-r^2}\,r\,dr$$

$$= \theta\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}\cdot\ -\tfrac{1}{2}e^{-r^2}\Big|_0^2$$

$$= \pi\cdot\left(-\tfrac{1}{2}e^{-4}+\tfrac{1}{2}e^{0}\right)$$

$$= \tfrac{\pi}{2}\left(1-e^{-4}\right)$$



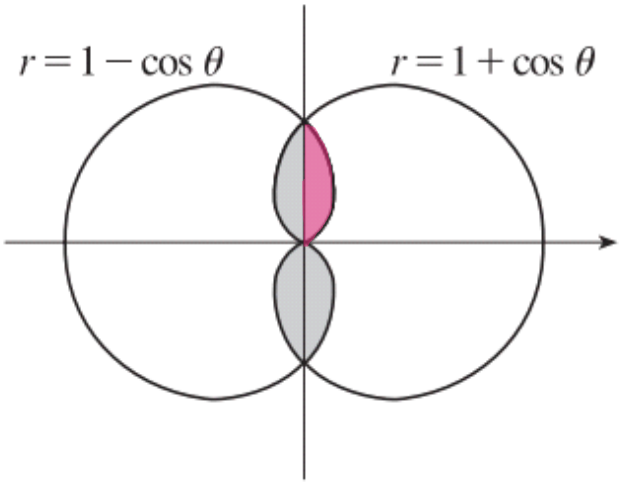
Problema 4

Use una integral doble para hallar el área de la región.

1) La región encerrada por las cardioides $r = 1 + \cos\theta$ y $r = 1 - \cos\theta$

2) La región dentro de la circunferencias $(x-1)^2 + y^2 = 1$ y fuera de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$

1) La region encerrada por las cardioides $r = 1+\cos\theta$, $r = 1-\cos\theta$



Usaremos la simetría!

Notar que el area pedida es 4 veces el area rosada la cual esta dada por:

$$\{(r,\theta) \mid 0 \le r \le 1-\cos(\theta),\ 0 \le \theta \le \tfrac{\pi}{2}\}$$

entonces

$$A = 4 \cdot \int_0^{\pi/2}\int_0^{1-\cos(\theta)} r\,dr\,d\theta = 4\int_0^{\pi/2} \frac{r^2}{2}\Big|_0^{1-\cos(\theta)} d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} (1-\cos(\theta))^2\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} 1 - 2\cos(\theta) + \cos^2(\theta)\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} 1 - 2\cos(\theta) + \tfrac{1}{2}(1+\cos(2\theta))\, d\theta$$

$$= 2\left(\theta\Big|_0^{\pi/2} + -2\sin(\theta)\Big|_0^{\pi/2} + \tfrac{1}{2}\left(\theta + \tfrac{\sin(2\theta)}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2}\right)$$

$$= 2\left(\tfrac{\pi}{2} + -2 + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\pi}{2} + 0\right)\right)$$

$$= \pi - 4 + \tfrac{\pi}{2} = \boxed{\tfrac{3\pi}{2} - 4}$$

2) La región dentro de la circunferencia $(x-1)^2+y^2=1$ y fuera de la circunferencia $x^2+y^2=1$

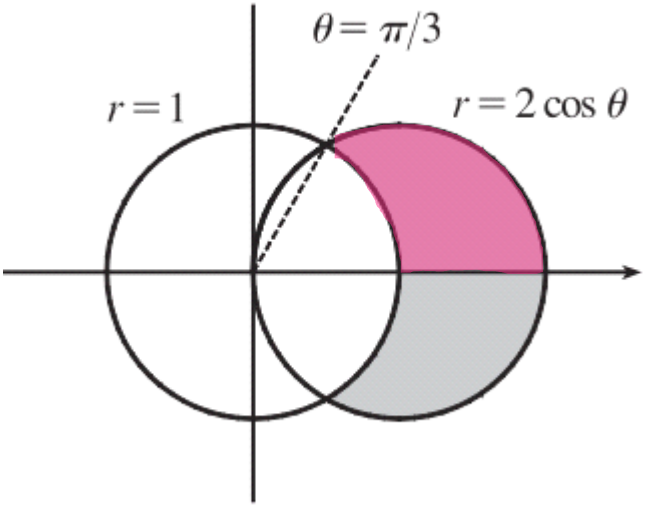
$(x-1)^2+y^2=1$

$x^2-2x+1+y^2=1$

$x^2+y^2=2x$

$r^2=2r\cos(\theta)$

$r=2\cos(\theta)$



$x^2+y^2=1$

$r^2=1$

$r=1$

se intersectan en $2\cos(\theta)=1$

$\cos(\theta)=\frac{1}{2}$ → en el primer cuadrante

$\theta=\pi/3$

por simetría, el área es 2 veces el área rosada D

$$D=\{(r,\theta) \mid 1\le r\le 2\cos(\theta),\ 0\le\theta\le\pi/3\}$$

entonces

$$\text{area}=2\cdot\int_0^{\pi/3}\int_1^{2\cos(\theta)} r\,dr\,d\theta=2\int_0^{\pi/3}\frac{r^2}{2}\Big|_1^{2\cos(\theta)}d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/3} 4\cos^2(\theta) - 1 \, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/3} 4 \cdot \frac{1}{2}\left(1 + \cos(2\theta)\right) - 1 \, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/3} 1 + 2\cos(2\theta) \, d\theta$$

$$= \theta + \sin(2\theta) \Big|_0^{\pi/3}$$

$$= \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Problema 5

Evalúe la integral iterada convirtiendo a coordenadas polares.

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx$$

$$\int_{x=0}^{x=2} \int_{y=0}^{y=\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\;dy\,dx$$

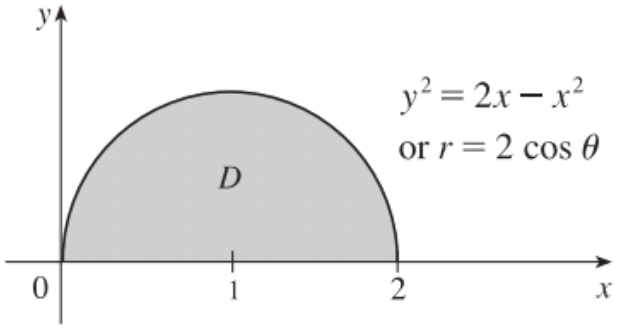
Analizamos la region

$$y = \sqrt{2x-x^2}$$

$$y^2 = 2x - x^2$$

$$x^2 - 2x + y^2 = 0$$

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$



La region en coordenadas polares

$$y = \sqrt{2x-x^2}$$

$$y^2 = 2x - x^2$$

$$x^2 + y^2 = 2x$$

$$r^2 = 2r\cos(\theta)$$

$$r = 2\cos(\theta)$$

$$D = \{(r,\theta) \mid 0 \le r \le 2\cos(\theta),\ 0 \le \theta \le \tfrac{\pi}{2}\}$$

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos(\theta)} \sqrt{r^2}\; r\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos(\theta)} r^2\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{r^3}{3}\Big|_0^{2\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} 8\cos^3(\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{8}{3}\int_0^{\pi/2} \cos(\theta)\left(1-\sin^2(\theta)\right)d\theta$$

$$= \frac{8}{3}\left(\sin(\theta) - \frac{1}{3}\sin^3(\theta)\right)\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{16}{9}$$