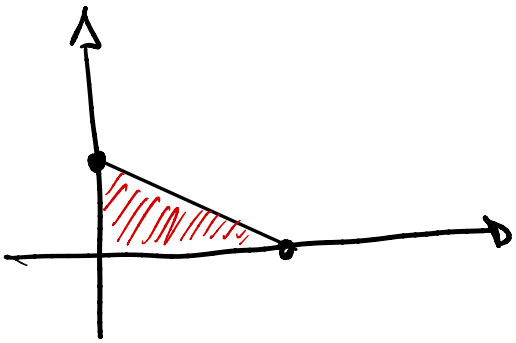
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2023

Ayudantía 11- MAT1620

1. Determine los valores máximos y mínimos absolutos de f sobre el conjunto D:
   (a) $f(x,y) = x + y - xy$ donde D es la región triangular cerrada con vértices en $(0,0), (0,2)$ y $(4,0)$.
   (b) $f(x,y) = 4x + 6y - x^2 - y^2$ donde $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 5\}$
   (c) $f(x,y) = xy^2$ donde $D = \{(x,y) : x \leq 0, x^2 + y^2 \leq 3\}$
2. Determine los puntos de la superficie $x^2 = 9 + xy$ que están más cerca del origen.
3. Determine las dimensiones de la caja rectangular de volumen máximo tal que la suma del largo de sus 12 aristas es una constante C.
4. Encuentre tres números positivos que sumen 100 y cuyo producto es un máximo.

1.- $f(x,y) = x + y - xy$

D



$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 - y = 0 \rightarrow y = 1$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 - x = 0 \rightarrow x = 1$

PTO CRÍTICO $(1,1)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -1$$

$$H(1,1) = 0 - (-1)^2 = -1$$

$(1,1) \rightarrow$ punto silla

Vemos en los extremos

1- arista de $(0,0)$ a $(0,2)$ $\rightarrow$ $x = 0$, y varía.

$f(0,y) = y$ — MAX $\rightarrow$ $y = 2 \rightarrow f(0,2) = 2$

MIN $\rightarrow$ $y = 0 \rightarrow f(0,0) = 0$

2- Arista de $(0,0)$ a $(4,0)$ $\rightarrow$ $y = 0$

$f(x,0) = x$

MAX $\rightarrow$ $x = 4 \rightarrow f(4,0) = 4$

MIN $\rightarrow$ $x = 0 \rightarrow f(0,0) = 0$

3- Arista $(0,2)$ y $(4,0)$

$y = 2 - \frac{x}{2}$

$f(x, 2 - \frac{x}{2}) = x + \left(2 - \frac{x}{2}\right) - x \cdot \left(2 - \frac{x}{2}\right)$

$$= \frac{x}{2} + 2 - 2x + \frac{x^2}{2}$$

$$f\left(x, 2-\frac{x}{2}\right) = -\frac{3}{2}x + 2 + \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{df}{dx} = -\frac{3}{2} + x$$

$x = \frac{3}{2}$

↓

crítico

$$f\left(3/2, \frac{5}{4}\right) = \frac{3}{2} + \frac{5}{4} - \frac{15}{8} = \frac{12+10-15}{8} = \frac{7}{8}$$

$$f(0,2) = 2$$

$$f(4,0) = 4$$

mín → 0 com (0,0)

máx → 4 com (4,0)

b) (b) $f(x,y) = 4x + 6y - x^2 - y^2$ donde $D = \{(x,y) : 0 \le x \le 4, 0 \le y \le 5\}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 4 - 2x$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = 6 - 2y$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$

Pto crítico → (2,3)

Como $H(2,3) = 4 > 0$, $f_{xx}(2,3) = -2$ → (2,3) es un máx local

$f(2,3) = 13$

bordes

$x = 0$ → $f(0,y) = 6y - y^2$, $0 \le y \le 5$

$f'(0,y) = 6 - 2y$ → $y = 3$

$f(0,0) = 0$ $\quad f(0,5) = 5$

$f(0,3) = 9$

$x = 4$ → $f(4,y) = 6y - y^2$, $0 \le y \le 5$

$f'(4,y) = 6 - 2y$ → $y = 3$

$f'(4,0) = 0$ $\quad f(4,3) = 9$

$f'(4,5) = 5$

$y = 0$ → $f(x,0) = 4x - x^2$ $\quad 0 \le x \le 4$

$f'(x,0) = 4 - 2x$ → $x = 2$

$f(0,0) = 0$ $\quad f(2,0) = 4$

$f(4,0) = 0$

$y = 5$ $\quad f(x,5) = 4x - x^2 + 5$

$f'(x,5) = 4 - 2x$ → $x = 2$

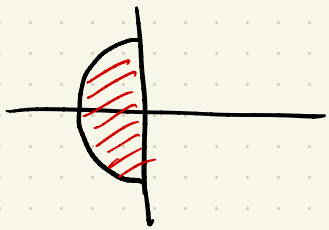
$f(0,5) = 5$ $\quad f(2,5) = 9$

$f(4,5) = 5$

El min es 0 con los pts $(0,0), (4,0)$

El máx es 13 con $(2,3)$

c) $f(x,y) = xy^2$ $\quad D \quad x^2+y^2 \leq 3$, $x \leq 0$



$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 = 0 \rightarrow y = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2yx \rightarrow x \text{ libre.}$$

↳ $-\sqrt{3} \leq x \leq 0$ críticos

$$f(x,0) = 0 \quad \forall x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x$$

$$H(x,0) = 0 \cdot 2x - (2 \cdot 0)^2 = 0$$

↓

no concluye nada

$x^2+y^2=3 \longrightarrow$ 1er borde

$x = -\sqrt{3-y^2}$

$f(-\sqrt{3-y^2}, y) = -\sqrt{3-y^2} \cdot y^2$

$f(-\sqrt{3-y^2}, y) = -\sqrt{3y^4-y^6}$

$f(\sqrt{3-y^2}, y) = -\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{3y^4-y^6}} \cdot 12y^3 - 6y^5\right) = 0$

$12y^3 - 6y^5 = 0$

$6y^3(2 - y^2) = 0$

$y = 0, \; y = \pm\sqrt{2}$

$y \neq 0$, porque se indefine.

$f(-1, \sqrt{2}) = -1 \cdot 2 = -2$

$f(-1, -\sqrt{2}) = -1 \cdot 2 = -2$

$x=0 \longrightarrow$ 2ob borde

$f(0,y)=0 \quad \forall y \in D$

mínimo $\rightarrow -2$ en $(1, -\sqrt{2})$

$(-1, \sqrt{2})$

máx $\rightarrow 0$ en $(0,y), -\sqrt{3} \leq y \leq \sqrt{3}$

$(x,0), -\sqrt{3} \leq x \leq 0$

2.- $x^2 = 9 + xy \rightarrow \frac{x^2 - 9}{x} = y$

$d(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\min \quad x^2 + y^2$

$s.a. \quad x^2 - xy = 9$

Se puede transformar, si tomamos $y = \frac{x^2-9}{x}$, y la restricción está inserta en la $f(x,y)$ a optimizar

$f(x,y) = x^2 + y^2$

Reemplazo $y = \frac{x^2-9}{x}$ → $x^2 + \frac{x^4 - 18x^2 + 81}{x^2}$ → forma de parábola hacia arriba.



$f'(x) = \frac{(8x^3 - 36x) \cdot x^2 - 2x(2x^4 - 18x^2 + 81)}{x^4}$

$\rightarrow f'(x) = \frac{8x^5 - 36x^3 - 4x^5 + 36x^3 - 162x}{x^4}$

$f'(x) = \frac{4x^5 - 162x}{x^4} = \frac{x(4x^4 - 162)}{x^4}$

$\rightarrow x = 0$ ✗ x no puede ser 0.

$4x^4 - 162 = 0 \rightarrow x = \pm \sqrt[4]{\frac{81}{2}}$

$y = \left(\frac{9}{\sqrt{2}} - 9\right) \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{\frac{81}{2}}}$ → Con $x = + \sqrt[4]{\frac{81}{2}}$

$$\rightarrow y = \frac{9 - \sqrt[2]{2}\cdot 9}{\sqrt[2]{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{2^3}}$$

$$y = \frac{3 - \sqrt[2]{2}\cdot 3}{\sqrt[4]{2}} = \frac{3(1-\sqrt[2]{2})}{\sqrt[4]{2}}$$

si $x = -\sqrt[4]{\frac{81}{2}}$

$$\hookrightarrow \left(\frac{9}{\sqrt[2]{2}} - 9\right) \cdot \frac{1}{-\sqrt[4]{\frac{81}{2}}} = -\frac{3(1-\sqrt[2]{2})}{\sqrt[4]{2}}$$

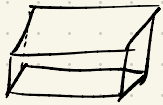
Los puntos más cerca de la superficie son:

$$\left(-\sqrt[4]{\frac{81}{2}}, \frac{-3(1-\sqrt[2]{2})}{\sqrt[4]{2}}\right) \text{ y } \left(\sqrt[4]{\frac{81}{2}}, \frac{3(1-\sqrt[2]{2})}{\sqrt[4]{2}}\right)$$

3. Determine las dimensiones de la caja rectangular de volumen máximo tal que la suma del largo de sus 12 aristas es una constante C.

4. Encuentre tres números positivos que sumen 100 y cuyo producto es un máximo.

Max $x \cdot y \cdot z$



$$4x + 4y + 4z = C$$

$$\left.\begin{array}{l} yz = \lambda \cdot 4 \\ xz = \lambda \cdot 4 \\ xy = \lambda \cdot 4 \end{array}\right\} \quad z = \frac{4\lambda}{y}, \quad x = \frac{4\lambda}{y} \quad \Rightarrow \quad z = x$$

$$\frac{xy}{xz} = \frac{4\lambda}{4\lambda} \rightarrow \frac{y}{z} = 1 \rightarrow y = z$$

Entonces $y = z = x$

$$4x + 4x + 4x = C$$

$$12x = C$$

$$\boxed{x = \frac{C}{12}}$$

$$\boxed{y = \frac{C}{12}}$$

$$\boxed{z = \frac{C}{12}}$$

Max xyz

S.a. $x + y + z = 100$

$$\begin{matrix} yz = \lambda \\ xz = \lambda \\ xy = \lambda \end{matrix} \rightarrow \frac{yz}{xz} = \frac{\lambda}{\lambda} \rightarrow y = x$$

$$\frac{yz}{xy} = \frac{\lambda}{\lambda} \rightarrow z = x$$

$$\rightarrow 3x = 100$$

$$\boxed{x = 33{,}33}$$

$$\boxed{\begin{matrix} y = 33{,}33 \\ z = 33{,}33 \end{matrix}}$$