Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
MAT1620 – Cálculo II
Segundo Semestre 2025

Ayudantía 5

Series de Taylor. Vectores

Problema 1

Encuentre una representación como serie de potencias centrada en $x = 0$ para las siguientes funciones indicando el radio de convergencia.

a) $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - x - 2}$

b) $f(x) = \ln(3 - x)$

c) $f(x) = x \arctan\left(x^3\right)$

Problema 2

a) Considere la serie de potencias

$$S(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$$

cuyo radio de convergencia es $R = \infty$ (no es necesario demostrarlo). Muestre que $S(x)$ satisface la ecuación diferencial

$$xS''(x) + S'(x) + xS(x) = 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

b) Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

i. Utilice series de potencias para calcular $\int_0^x f(t)\,dt$.

ii. Determine cuántos términos de la serie debe sumar para calcular la integral $\int_0^\pi f(x)\,dx$ con un error máximo de 0.001.

Problema 3

Considere un triángulo cuyos lados son los segmentos que se forman al unir los puntos $A(4,2,0)$, $B(1,3,0)$, $C(1,1,3)$. Determine el vector que une el origen con el punto de intersección de las medianas del triángulo.

Problema 4 ($\star$)

Recuerde la sucesión de Fibonacci $\{a_n\}$ Definida por $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$

a) Demuestre que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 2$$

b) Sea:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + ...$$

Utilice el criterio de la razón para demostrar que $f(x)$ converge si $|x| < 1/2$

c) Demostrar que si $|x| < 1/2$, entonces:

$$f(x) = \frac{-1}{x^2 + x - 1}$$

Hint: *Puede escribir la ecuación tal que* $f(x) - xf(x) - x^2 f(x) = 1$.

d) Utilizar la descomposición en fracciones simples para $\dfrac{1}{(x^2 + x - 1)}$ para obtener otra serie de potencias para f.

e) Las dos series obtenidas para f deben ser idénticas. Utilice este hecho para demostrar que:

$$a_n = \frac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Problema 5 (Propuestos)

a) Considere la siguiente ecuación diferencial:

$$y''(x) + y(x) = 0$$

Suponga que la ecuación posee una solución del tipo $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Resuelva la ecuación diferencial encontrando expresiones para los c_n, determine el intervalo donde esta función es solución, e identifique la función.

b) Considere el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$. Demuestre que:

i) El neutro aditivo es único.

ii) Todo vector de $\mathbb{R}^n$ tiene un único inverso aditivo.

iii) Para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ se tiene $-(-\vec{v}) = \vec{v}$.

iv) Si $a \in \mathbb{R}$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, y $a\vec{v} = \vec{0}$, entonces $a = 0$, o $\vec{v} = \vec{0}$.