1.a) Utilizaremos fracciones parciales para simplificar la expresión

$$\frac{3}{x^2-x-2} = \frac{3}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}$$

Luego

$$3 = A(x+1) + B(x-2)$$

$$3 = Ax + A + Bx - 2B$$

$$3 = (A+B)x + (A-2B)$$

Como no tenemos un x en el denominador sabemos que

$$\begin{aligned} A+B &= 0 \\ A-2B &= 3 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} A &= 1 \\ B &= -1 \end{aligned}$$

Obtenemos entonces que

$$f(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1}$$

Busquemos lo expresar como una serie geometrica

$$f(x) = -\left[\frac{1}{2-x} + \frac{1}{x+1}\right]$$

$$= -\left[\frac{1}{2\left(1-\frac{x}{2}\right)} + \frac{1}{1-(-x)}\right]$$

$$= -\left[\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^n}_{T_1} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n}_{T_2}\right]$$

$$= -\left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n-1}} + (-1)^n\right) x^n\right]$$

Notamos que la función corresponde a la serie de dos geometricas T_1 y T_2, es facil comprobar que T_1 tiene un radio de convergencia de 2 y T_2 un radio de 1, (se comprueba con criterio de la raiz).

Luego si queremos que ambas converjan tomamos la menor, es decir el radio será 1.

1.b) Notemos que

$$\ln(3-x) = -\int \frac{dx}{3-x} = -\frac{1}{3}\int \frac{dx}{1-\frac{x}{3}}$$

Ahora podemos expresar como serie de potencias

$$\ln(3-x) = \frac{-1}{3}\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n\right) dx$$

$$= \frac{-1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{x^n}{3^n}$$

$$= \frac{-1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{3^n(n+1)} + C$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)} + C$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n n} + C$$

Evaluando en $x=0$ obtenemos que $C = \ln(3)$, luego

$$\ln(3-x) = \ln(3) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n n}$$

Ocupando criterio de la raiz

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{|x|^n}{3^n n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{|x|}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{|x|}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{|x|}{3} < 1$$

$$|x| < 3$$

Concluimos que el radio de convergencia es 3

1. c) Recordemos que

$$\arctan(u) = \int \frac{du}{1+u^2}$$

usemos la serie geometrica

$$\arctan(u) = \int \frac{du}{1-(-u^2)}$$

$$= \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u^{2n} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int u^{2n}\, du$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{u^{2n+1}}{2n+1} + C$$

Evaluando en $u = 0$ obtenemos que $C = \arctan(0) = 0$. Luego

$$x\arctan(x^3) = x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x^3)^{2n+1}}{2n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{6n+4}}{2n+1}$$

Veamos el radio de convergencia por el criterio del cuociente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{6n+10}}{2n+3} \cdot \frac{2n+1}{|x|^{6n+4}}$$

$$= |x|^6 \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+3} \to 1$$

$$= |x|^6 < 1 \implies |x| < 1$$

Obtenemos que el radio de convergencia es 1.

2) Obtengamos primero $\ln(1+x)$

$$\ln(1+x) = \int \frac{dx}{1+x} = \int \frac{dx}{1-(-x)} = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n\right) dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int x^n dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Evaluando en $x=0$, obtenemos que $C = \ln(1) = 0$. concluimos que

$$\ln(1+x) = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$$

Luego

$$\int x^2 \ln(1+x)\, dx = -\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+2}}{n}\right) dx$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \int x^{n+2} dx$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+3}}{n(n+3)} + C$$

Apliquemos criterio del cuociente para el radio de convergencia

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+4}}{(n+1)(n+4)} \cdot \frac{n(n+3)}{|x|^{n+3}}$$

$$= |x| \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+3)}{(n+1)(n+4)} \to 1 \quad \text{comprobar!!}$$

$$= |x| < 1$$

Concluimos que el radio de convergencia es 1

3.a) Recordemos que

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Luego

$$e^x + e^{2x} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}_{T_1} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!}}_{T_2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \frac{(2x)^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 1}{n!} x^n$$

Saquemos el radio de convergencia de T_1 utilizando criterio del cuociente, esto ya que T_2 simplemente tendra la mitad del radio de T_1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x|^n}$$

$$= |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

concluimos que el radio es infinito, por lo que para T_2 tambien lo sera', luego para la función el radio de convergencia es infinito

3.b) Recordemos que

$$\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \quad , \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Utilizando ambas propiedades obtenemos que

$$\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1}{2}\left[1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}\right]$$

Calculamos el radio de convergencia a travez del criterio del cuociente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|2x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{|2x|^{2n}} = |2x|^2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} = 0 < 1$$

Concluimos que el radio de convergencia es infinito.

4.a) Notamos el patrón de la suma para escribirlo como sumatoria

$$1 - \ln(2) + \frac{\ln^2(2)}{2!} - \frac{\ln^3(2)}{3!} \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln^n(2)}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\ln(2))^n}{n!} \quad \text{↙ } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

$$= e^{-\ln(2)}$$

$$= 2^{-1} = \frac{1}{2}.$$

4.b) Notemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3^n}{n5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(3/5)^n}{n} \quad \text{↙ } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \ln(x+1)$$

Revisar ejercicio 2.

$$= \ln(3/5 + 1)$$

$$= \ln(8/5)$$

$$= \ln(8) - \ln(5).$$