PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2023

# Ayudantía 10- MAT1620

1. Calcule la derivada direccional de:

   (a) la función $f(x,y) = e^x \text{sen}(y)$ en el punto $(0, \pi/3)$ en la dirección del vector $(-6, 8)$.

   (b) la función $f(x,y) = x^3y^4 + x^4y^3$ en el punto $(1,1)$ en la dirección del ángulo $\theta = \pi/6$.

2. Suponga que en una cierta región del espacio el potencial eléctrico $V$ está definido por

$$V(x,y,z) = 5x^2 - 3xy + xyz$$

   (a) Determine la razón de cambio del potencial en $P(3,4,5)$ en la dirección del vector $v = (1,1,-1)$.

   (b) ¿En qué dirección cambia $V$ con mayor rapidez de $P$?

   (c) ¿Cuál es la razón máxima de cambio en $P$?

3. ¿En qué punto del paraboloide $y = x^2 + z^2$ el plano tangente es paralelo al plano $x + 2y + 3z = 1$?

4. Clasifique los puntos críticos de la función

$$f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

1. Calcule la derivada direccional de:

   (a) la función $f(x,y) = e^x \text{sen}(y)$ en el punto $(0, \pi/3)$ en la dirección del vector $(-6, 8)$.

   (b) la función $f(x,y) = x^3y^4 + x^4y^3$ en el punto $(1,1)$ en la dirección del ángulo $\theta = \pi/6$.

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (e^x \operatorname{sen} y, e^x \cos y)$$

$$\nabla f(0, \pi/3) = \left(1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, 1 \cdot \frac{1}{2}\right)$$

normalizamos la dirección

$$u = (-6,8) \cdot \frac{1}{\sqrt{36+64}} = (-6,8) \cdot \frac{1}{10} = (-0{,}6, 0{,}8)$$

$$\rightarrow = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \cdot (-0{,}6, 0{,}8)$$

$$D_u f\left(0, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{-6\sqrt{3}}{20} + \frac{8}{20} = \frac{-6\sqrt{3}+8}{20}$$

b) $\nabla f(x,y) = \left( 3x^2y^4 + 4x^3y^3 , 4y^3x^3 + 3y^2x^4 \right)$

$\nabla f(1,1) = (7, 7)$

$\theta = \pi/6$

↳ $\vec{v} = (\cos(\pi/6), \operatorname{sen}(\pi/6))$

$\vec{v} = \left( \frac{\sqrt{3}}{2} , \frac{1}{2} \right)$

$\rightarrow D_{\vec{v}} f(1,1) = \frac{7 \cdot \sqrt{3}}{2} + \frac{7}{2} = \frac{7(\sqrt{3}+1)}{2}$

2. Suponga que en una cierta región del espacio el potencial eléctrico $V$ está definido por

$$V(x, y, z) = 5x^2 - 3xy + xyz$$

(a) Determine la razón de cambio del potencial en $P(3, 4, 5)$ en la dirección del vector $v = (1, 1, -1)$.

(b) ¿En qué dirección cambia $V$ con mayor rapidez de $P$?

(c) ¿Cuál es la razón máxima de cambio en $P$?

$$\nabla V(x,y,z) = (10x - 3y + yz,\ -3x + xz,\ xy)$$

$$\nabla V(3,4,5) = (30 - 12 + 20,\ -9 + 15,\ 12)$$

$$= (38,\ 6,\ 12)$$

$$\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = (1,1,-1) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = (1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3},\ -1/\sqrt{3})$$

$$\boxed{D_{\vec{v}} V(3,4,5) = \frac{38}{\sqrt{3}} + \frac{6}{\sqrt{3}} - \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{32}{\sqrt{3}}}$$

b)

$$\nabla V(3,4,5) = (38, 6, 12)$$

la dirección de máximo crecimiento es $(38, 6, 12)$

c) $|\nabla V(3,4,5)| = \sqrt{38^2+6^2+12^2} = 40{,}298$

3. ¿En qué punto del paraboloide $y = x^2+z^2$ el plano tangente es paralelo al plano $x+2y+3z = 1$?

Vector normal de $x+2y+3z=1$ es

$$\vec{v}_n = (1,2,3)$$

$$y - x^2 - z^2 = 0 \rightarrow F(x,y,z) = y - x^2 - z^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -2x \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 1 \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = -2z$$

Para que sean paralelos

$$F_x(x,y,z) = 1 \cdot \alpha \qquad F_z(x,y,z) = 3 \cdot \alpha$$

$$F_y(x,y,z) = 2 \cdot \alpha$$

$$\rightarrow \quad F_y(x,y,z) = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \quad F_x(x,y,z) = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x = -\frac{1}{4}}$$

$$F_z(x,y,z) = -2z = \frac{3}{2} \rightarrow \boxed{z = -\frac{3}{4}}$$

$$y = \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1+9}{16} = \frac{10}{16}$$

$$\boxed{y = \frac{10}{16}}$$

En el punto $\left(-\frac{1}{4} \mid \frac{10}{16} \mid -\frac{3}{4}\right)$

* Recordar que Planos paralelos ⇔ cuando sus vectores normales son paralelos.

4. Clasifique los puntos críticos de la función

$$f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

$\frac{\partial f}{\partial x} = y - \frac{1}{x^2} = 0 \rightarrow y - \frac{1}{\frac{1}{y^4}} = 0 \rightarrow y - y^4 = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y} = x - \frac{1}{y^2} = 0 \rightarrow x = \frac{1}{y^2}$

$y = 0 \; ; \; y = 1$

$x$ no puede ser

$x = \frac{1}{1} = 1$

Pto crítico → 1,1

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = \frac{2}{y^3}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = \frac{2}{x^3}$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1)\right)^2 = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{1} - (1)^2$$

$$= 4 - 1 = 3$$

Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} < 0$, $(x_0, y_0)$ es pto silla.

Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} > 0$ y $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ es

máximo local

Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} > 0$ y $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ es

mínimo local

Como el hessiano es $>0$ y $f_{xx}(1,1) > 0$, $(1,1)$ es mínimo local.