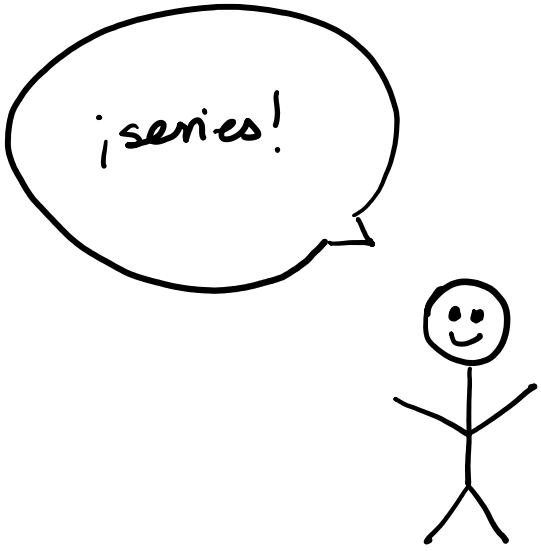
Ayudantía 3

isabel.kreimerman@gmail.com



Problema 1

Sea

$$a_n = \frac{2n}{3n+1}$$

a) Determine si $\{a_n\}$ es convergente.

b) Determine si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

Calculamos el limite de

$$a_n = \frac{2n}{3n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3n+1} = \frac{2}{3}$$

Entonces, sabemos que la sucesion (a) converge pero la serie (b) diverge por prueba de la divergencia

Problema 2

Determine si la serie es convergente o divergente. Si es convergente, encuentre su suma.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} 6\,(0,9)^{n-1}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{3n-1}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k\,(k+2)}{(k+3)^2}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^n}{2^n}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(\frac{2}{3})^n}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos\frac{1}{n^2} - \cos\frac{1}{(n+1)^2}\right)$

a) $\sum_{n=1}^{\infty} 6\,(0,9)^{n-1}$

Notamos que es una serie geometrica

entonces

$r = 0,9$

$|r| = 0,9 < 1$ ∴ converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} 6\,(0,9)^{n-1} = \frac{6}{1-0,9} = 60$$

Serie Geometrica

$\sum_{n=1}^{\infty} a r^{n-1}$

converge $|r|<1$

diverge $|r| \geq 1$

y vale $\frac{a}{1-r}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{3n-1}$

Usamos la prueba de la divergencia:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{3n-1} = \frac{1}{3} \neq 0$$

∴ diverge

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+2)}{(k+3)^2}$

lo podemos reescribir como

$$\frac{k^2\left(1+\frac{2}{k}\right)}{k^2\left(1+\frac{6}{k}+\frac{9}{k^2}\right)}$$

calculando el limite

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k(k+2)}{(k+3)^2} = 1 \neq 0$$

$\therefore$ diverge

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^n}{2^n}$

Reordenamos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \left(\frac{3}{2}\right)^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n}_{\text{serie geometrica convergente}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n}_{\text{serie geometrica divergente}}$$

$\therefore$ diverge

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)$

Usamos la prueba de la divergencia

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right) = \ln\left(\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$$

$\therefore$ diverge

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$

Usamos la prueba de la divergencia

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n} = 1 \neq 0$$

$\therefore$ diverge

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n^2}\right) - \cos\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)$

Notar que la serie es: telescopica

$$\cos(1) - \cos\left(\tfrac{1}{4}\right) + \cos\left(\tfrac{1}{4}\right) - \cos\left(\tfrac{1}{9}\right) + \cdots + \cos\left(\tfrac{1}{n^2}\right) - \cos\left(\tfrac{1}{(n+1)^2}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n^2}\right) - \cos\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \cos(1) - \cos\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

$$= \cos(1) - \cos(0)$$

Es $s(1) - 1$

$\therefore$ converge

Problema 3

Calcule los valores de x para los cuales la siguiente serie converge.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{x^n}$$

Luego determine la suma de la serie para dichos valores de x.

Notar que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{x}\right)^{n-1}$

entonces se trata de una serie geometrica con

$a = 1 \quad r = \frac{2}{x}$

Para que converja:

$$\left|\frac{2}{x}\right| < 1$$

$$2 < |x|$$

$x < -2$ ↙ ↘ $x > 2$ } valores de x para que la serie converja

y su valor sera: $\frac{1}{1 - \frac{2}{x}}$

$= \frac{x}{x-2}$

Problema 4

Determine si la serie es convergente o divergente.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+4}{n^2}$

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ \ln(n)}$

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+4}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2} + \frac{4}{n^2}$

$= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}}_{\text{converge (serie p)}} + 4 \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}_{\text{converge (serie p)}}$

$\therefore$ converge

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$ Notar que la función $f(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$ es

→ decreciente $f'(x) < 0 \ \forall\ x \in [2, \infty[$

→ continua para $x \in [2, \infty[$

→ positiva para $x \in [2, \infty[$

entonces usamos el criterio de la integral:

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln(x)} = \lim_{t\to\infty} \ln(\ln(x))\Big|_2^t$$
$$= \ln(\ln(t)) - \ln(\ln(2))$$
$$= \infty$$

$\therefore$ la integral diverge

$\therefore$ la serie diverge también

Problema 5

Determine los valores de p para los cuales la siguiente serie es convergente.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^p}$$

Notar que la función

$$f(x) = \frac{1}{x\ln^p(x)}$$

es → positiva $\forall\ x>2$

→ decreciente $\forall\ x > e^{-p}$

$$f'(x) = -\frac{p+\ln(x)}{x^2\ln^{p+1}(x)} < 0$$

→ continua $\forall\ x>2$

por lo que podemos usar el criterio de la integral

$$\int_2^\infty \frac{1}{x\ln^p(x)}\,dx = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{\ln^{1-p}(x)}{1-p}\right]\Big|_2^t$$

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{\ln(t)^{1-p}}{1-p} - \frac{\ln(2)^{1-p}}{1-p} \quad * \text{ con } p \neq 1$$

Este límite existe para $1 - p < 0$ por lo que los valores de p para que la serie converja son:

$$p > 1$$