Ayudantía 1

isabel.kreimerman@gmail.com



1.

¿Cuáles de las siguientes integrales es impropia? ¿Por qué?

a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tan(x)\,dx$

b) $\int_0^{\pi} tan(x)\,dx$

c) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2 - x - 2}\,dx$

d) $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$

a) Notar que $\tan(x)$ es continua $\forall\, x \in [0, \frac{\pi}{4}]$

∴ es propia

b) Notar que $\tan(x)$ presenta una discontinuidad en $x = \pi/2$

∴ es impropia

* Notar que para resolverla tendríamos que separarla

c) Notar que

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2 - x - 2} = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x-2)(x-1)}$$

por lo que sería discontinua para $x = 1$; $x = 2$

∴ es impropia

d) Dado que uno de los límites de integración es ∞

∴ es impropia

2.

Determine si cada una de las siguientes integrales es convergente o divergente. Evalué las que son convergentes.

a) $\int_3^\infty \frac{1}{(x-2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$

b) $\int_0^\infty \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}\,dx$

c) $\int_2^\infty \frac{1}{v^2+2v-3}\,dv$

d) $\int_{-\infty}^0 ze^{2z}\,dz$

e) $\int_{-\infty}^\infty x^3e^{-x^4}\,dx$

f) $\int_0^\infty \frac{e^x}{e^{2x}+3}\,dx$

g) $\int_0^1 \frac{3}{x^5}\,dx$

a) $\int_3^\infty \frac{dx}{(x-2)^{3/2}} = \lim_{t\to\infty} \int_3^t \frac{dx}{(x-2)^{3/2}}$

$= \lim_{t\to\infty} \frac{-2}{(x-2)^{1/2}}\Big|_3^t$

$= \lim_{t\to\infty} \frac{-2}{\sqrt{t-2}} + \frac{2}{\sqrt{1}}$

$= 2$

∴ converge

b) $\int_0^\infty \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{x^2}{(1+x^3)^{1/2}}\,dx$

$= \lim_{t\to\infty} \frac{2}{3}(1+x^3)^{1/2}\Big|_0^t$

$= \lim_{t\to\infty} \frac{2}{3}\left[\sqrt{1+t^3} - \sqrt{1+0^3}\right]$

$= \infty$

∴ diverge

c) $\int_2^\infty \frac{dv}{v^2+2v-3} = \int_2^\infty \frac{dv}{(v+3)(v-1)}$

integramos con fracciones parciales

$= \lim_{t\to\infty} \int_2^t \frac{dv}{(v+3)(v-1)}$

$= \lim_{t\to\infty} \int_2^t \frac{-1/4}{v+3} + \frac{1/4}{v-1}\, dv$

$= \lim_{t\to\infty} \left[\int_2^t \frac{-dv}{4(v+3)} + \int_2^t \frac{dv}{4(v-1)} \right]$

$= \lim_{t\to\infty} \frac{-\ln(v+3)}{4}\Big|_2^t + \frac{\ln(v-1)}{4}\Big|_2^t$

propiedades de logaritmos

$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{4}\left(-\ln(t+3)+\ln(5)+\ln(t-1)+\ln(1)\right)$

$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{4}\left(\ln\left(\frac{t-1}{t+3}\right) + \ln(5\cdot 1)\right)$

$= \frac{\ln(5)}{4}$

$\therefore$ converge

d) $\int_{-\infty}^{0} z\, e^{2z}\, dz$



integración por partes

$= \lim_{t\to-\infty} \int_t^0 z\, e^{2z}\, dz$

$= \lim_{t\to-\infty} \frac{z e^{2z}}{2}\Big|_t^0 - \int_t^0 \frac{e^{2z}}{2}\, dz$

$= \lim_{t\to-\infty} 0 - \frac{t e^{2t}}{2} - \frac{e^{2z}}{4}\Big|_t^0$

$u = z \qquad du = dz$

$dv = e^{2z} dz \qquad v = \frac{e^{2z}}{2}$

$= \lim_{t\to-\infty} -\frac{t e^{2t}}{2} - \frac{1}{4} + \frac{e^{2t}}{4}$

$= -1/4$

∴ converge

e) $\int_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{-x^4}\, dx = \int_{-\infty}^{0} x^3 e^{-x^4}\, dx + \int_0^{\infty} x^3 e^{-x^4}\, dx$

$= \lim_{t\to-\infty} \int_t^0 x^3 e^{-x^4}\, dx + \lim_{t\to\infty} \int_0^t x^3 e^{-x^4}\, dx$

$= \lim_{t\to-\infty} -\frac{1}{4} e^{-x^4}\Big|_t^0 + \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{4} e^{-x^4}\Big|_0^t$

$= \lim_{t\to-\infty} \left(-\frac{1}{4} + \frac{e^{-t^4}}{4}\right) + \lim_{t\to\infty} \left(-\frac{e^{-t^4}}{4} + \frac{1}{4}\right)$

$= -1/4 + 1/4$

∴ converge

f) $\int_0^\infty \frac{e^x}{e^{2x}+3}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{e^x}{e^{2x}+3}\,dx$

$= \lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{e^x}{(e^x)^2+(\sqrt{3})^2}\,dx$

$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{e^x}{\sqrt{3}}\right)\Big|_0^t$

$= \frac{1}{\sqrt{3}} \lim_{t\to\infty} \arctan\left(\frac{e^t}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$

$= \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$

∴ converge

g) $\int_0^1 \frac{3}{x^5}\,dx = \lim_{t\to 0} \int_t^1 3x^{-5}\,dx$

$= \lim_{t\to 0} -\frac{3}{4}x^{-4}\Big|_t^1$

$= \lim_{t\to 0} -\frac{3}{4} + \frac{3}{4t^4}$

$= \infty$

∴ divergente

3.

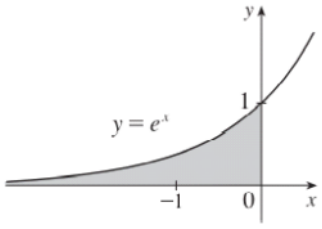
Trace cada una de las siguientes regiones y encuentre su área (si el área es finita).

a) $S = (x, y) : x \leq 0, 0 \leq y \leq e^x$

b) $S = (x, y) : 0 \leq x, 0 \leq y \leq xe^{-x}$

c) $S = (x, y) : 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq sec^2(x)$

a) $S = (x, y) : x \leq 0 \ , \ 0 \leq y \leq e^x$



$$\text{area} = \int_{-\infty}^{0} e^x \, dx$$

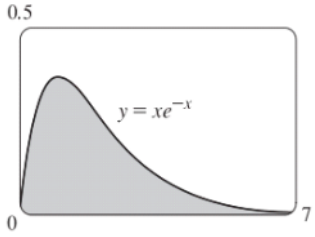
$$= \lim_{t \to -\infty} \int_t^0 e^x \, dx$$

$$= \lim_{t \to -\infty} e^x \Big|_t^0$$

$$= \lim_{t \to -\infty} 1 - e^t$$

$$= 1$$

b) $S = (x, y) : 0 \leq x \ , \ 0 \leq y \leq xe^{-x}$



$$\text{area} = \int_0^{\infty} x e^{-x} \, dx$$

$$= \lim_{t \to \infty} \int_0^t x e^{-x} \, dx$$

$\int u \, dv = uv - \int v \, du$ $\quad u = x \quad dv = e^{-x} \quad du = dx \quad v = -e^{-x}$

$$= \lim_{t \to \infty} (-xe^{-x}) \Big|_0^t - \int_0^t -e^{-x} \, dx$$

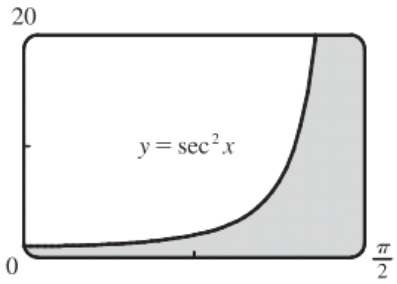
$$= \lim_{t \to \infty} (-te^{-t} + 0) + \int_0^t e^{-x} \, dx$$

$$= \lim_{t \to \infty} -te^{-t} + (-e^{-x}) \Big|_0^t$$

$$= \lim_{t \to \infty} -te^{-t} - e^{-t} + 1$$

$$= 1$$

c) $S = (x, y)$: $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$; $0 \le y \le \sec^2(x)$



$$\text{area} = \int_0^{\pi/2} \sec^2(x)\,dx$$
$$= \lim_{t \to \pi/2^-} \int_0^t \sec^2(x)\,dx$$
$$= \lim_{t \to \pi/2^-} \tan(x)\Big|_0^t$$
$$= \lim_{t \to \pi/2^-} \tan(t) - \tan(0)$$
$$= \infty$$

4.

Utilice el teorema de la comparación para determinar si cada una de las integrales es convergente o divergente.

a) $\int_0^\infty \frac{x}{x^3+1}\,dx$ b) $\int_1^\infty \frac{2+e^{-x}}{x}\,dx$

c) $\int_1^\infty \frac{x+1}{\sqrt{x^4-x}}\,dx$

a) $\int_0^\infty \frac{x}{x^3+1}\,dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{x}{x^3+1}\,dx}_{I1} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{x}{x^3+1}\,dx}_{I2}$

I1 : converge

I2 : sabemos que $\forall\, x > 0$:

$$\frac{x}{x^3+1} < \frac{x}{x^3}$$
$$\frac{x}{x^3+1} < \frac{1}{x^2}$$

Importante

$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ converge $p < 1$; diverge $p \ge 1$

$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ converge $p > 1$; diverge $p \le 1$

$$\int_1^\infty \frac{x}{x^3+1}\,dx < \underbrace{\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx}$$

converge por criterio p

∴ por criterio de comparación, la integral es convergente

b) $\int_1^\infty \frac{2+e^{-x}}{x}\,dx$

sabemos que $\forall\ x>1$:

$$\frac{2+e^{-x}}{x} > \frac{2}{x} > \frac{1}{x}$$

$$\int_1^\infty \frac{2+e^{-x}}{x}\,dx > \underbrace{\int_1^\infty \frac{dx}{x}}$$

diverge (criterio p)

∴ La integral es divergente por criterio de comparación

c) $\int_1^\infty \frac{x+1}{\sqrt{x^4-x}}\,dx$

sabemos que $\forall\ x>1$:

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^4-x}} > \frac{x+1}{\sqrt{x^4}}$$

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^4-x}} > \frac{x}{x^2}$$

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^4-x}} > \frac{1}{x}$$

$$\int_1^\infty \frac{x+1}{\sqrt{x^4-x}}\,dx > \underbrace{\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx}$$

diverge por criterio p

∴ la integral solicitada diverge por criterio de comparación

Ejercicios extra

1.

Utilice la sustitución $u = \frac{1}{x}$ para demostrar que

$$\int_0^\infty \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,dx = 0$$

si $u = \frac{1}{x} \longleftrightarrow x = \frac{1}{u}$ $\quad dx = -u^{-2}\,du$

$$\int_0^\infty \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,dx = \int_\infty^0 \frac{\ln\left(\frac{1}{u}\right)}{1+\left(\frac{1}{u}\right)^2}\left(-\frac{du}{u^2}\right)$$

$$= \int_\infty^0 \frac{\ln(1)-\ln(u)}{\frac{u^2+1}{u^2}}\left(-\frac{du}{u^2}\right)$$

$$= \int_{\infty}^{0} \frac{-\ln(u)\cdot u^2}{u^2+1}\left(-\frac{du}{u^2}\right)$$

$$= \int_{\infty}^{0} \frac{\ln(u)}{u^2+1}\,du$$

$$= -\int_{0}^{\infty} \frac{\ln(u)}{u^2+1}\,du$$

esto implica que

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^2+1}\,dx = -\int_0^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^2+1}\,dx$$

por lo que esta integral debe ser 0

2.

Utilice el criterio de comparación para notar si las siguientes integrales convergen o divergen

a)

$$\int_0^1 \frac{2+\text{sen}(y)}{\sqrt{y}}\,dy$$

b)

$$\int_1^\infty \frac{2+\text{sen}(y)}{\sqrt{y}}\,dy$$

Según los resultados anteriores, ¿converge la siguiente integral?

$$\int_0^\infty \frac{2+\text{sen}(y)}{\sqrt{y}}\,dy$$

sabemos que

$$-1 \leq \sin(y) \leq 1$$

por lo que

$$\frac{2-1}{\sqrt{y}} \leq \frac{2+\sin(y)}{\sqrt{y}} \leq \frac{2+1}{\sqrt{y}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{y}} \leq \frac{2+\sin(y)}{\sqrt{y}} \leq \frac{3}{\sqrt{y}}$$

$$\frac{1}{y^{1/2}} \leq \frac{2+\sin(y)}{\sqrt{y}} \leq \frac{3}{y^{1/2}}$$

entonces $\int_0^1 \frac{2+\sin(y)}{\sqrt{y}}\,dy \leq 3\int_0^1 \frac{1}{y^{1/2}}\,dy$

$$\int_0^1 \frac{2+\sin(y)}{\sqrt{y}}\,dy \leq 3\underbrace{\int_0^1 \frac{1}{y^{1/2}}\,dy}_{\text{converge por criterio p}}$$

$\therefore \int_0^1 \frac{2+\sin(y)}{\sqrt{y}}\,dy$ converge por comparación

por otra parte

$$\underbrace{\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{y}}\,dy}_{\text{diverge por criterio p}} \leq \int_1^\infty \frac{2+\sin(y)}{\sqrt{y}}\,dy$$

$\therefore \int_1^\infty \frac{2+\sin(y)}{\sqrt{y}}\,dy$ diverge por comparación

Así

$$\int_0^\infty \frac{2+\sin(y)}{\sqrt{y}}\,dy = \underbrace{\int_0^1 \frac{2+\sin(y)}{\sqrt{y}}\,dy}_{\text{converge}} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{2+\sin(y)}{\sqrt{y}}\,dy}_{\text{diverge}}$$

$\therefore$ diverge