Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
MAT1620 – Cálculo II
Segundo Semestre 2025

Ayudantía 14

Integrales Triples: Coordenadas Cilíndricas y Esféricas. Cambios de Variable en Integrales Múltiples

---

Problema 1

Calcule el volumen del sólido interior al cilindro $x^2+y^2 = 2ax$, con $a > 0$ constante, entre el plano $z = 0$ y el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Problema 2

Evalúe

$$\iiint_E x\, e^{x^2+y^2+z^2}\, dV$$

donde E es la porción de la esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ que está en el primer octante.

Problema 3

Evalúe la siguiente integral:

$$\iint_D \frac{(x-y)^2}{x+y}\, dA$$

donde D es el paralelogramo delimitado por las rectas:

$$x - y = 0 \qquad x - y = 2 \qquad x + y = 1 \qquad x + y = 4$$

Sugerencia: Utilice el cambio de variables

$$u = x - y \qquad v = x + y$$

Problema 4 ($\star$)

Considere la transformación $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = F(x, y) = \begin{bmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{bmatrix}$$

a) Muestre que F **no** es uno-a-uno.

b) Encuentre condiciones sobre el dominio de F para que sea uno-a-uno.

c) Utilice lo anterior para calcular

$$\iint_T e^{(x^2-y^2)^2} e^{4x^2y^2}(x^2 + y^2)\, dA$$

donde T es el ánulo $T = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\right\}$, con $0 < a < b$.

Problema 5 (Propuestos)

a) Determine el volumen de la pequeña cuña cortada de la esfera de radio a por dos planos que intersecan a lo largo de un diámetro en un ángulo de $\pi/6$.

b) Sea D la región acotada por la curva $x^{3/2} + y^{3/2} = a^{3/2}$, para $x \geq 0$, $y \geq 0$, y los ejes coordenados $x = 0$, $y = 0$. Dada f continua sobre D, exprese $\iint_D f(x, y)\, dA$ como una integral sobre el triángulo D^*, que es el conjunto de puntos con $0 \leq u \leq a$, $0 \leq v \leq a - u$.

c) Denotemos por R la región dentro de $x^2 + y^2 = 1$, pero fuera de $x^2 + y^2 = 2y$, con $x \geq 0$, $y \geq 0$.

   i. Esboce esta región en el plano xy.

   ii. Sea $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = T(x, y) = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 - 2y \end{bmatrix}$. Esboce la región D en el plano uv que corresponde a R bajo este cambio de coordenadas.

   iii. Calcular $\iint_R xe^y\, dA$ usando este cambio de coordenadas.

   iv. Calcule la integral del inciso anterior usando cambio a coordenadas polares. Compare ambos métodos.