Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
MAT1620 – Cálculo 2
Segundo Semestre del 2025

Ayudantía 1

Integrales impropias

Problema 1

La integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx$$

es impropia por dos razones: el integrando tiene una asíntota vertical en $x = 0$ y el intervalo de integración es no acotado. Resuélvala separándola en dos integrales, una en el intervalo $[0, a]$ y otra en el intervalo $[a, \infty)$ $(a \in (0, \infty))$.

Problema 2

Demuestre que si $a > -1$ y $b > a + 1$, entonces la siguiente integral converge:

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{1+x^b}\,dx$$

Problema 3

Estudie la convergencia de las siguientes integrales:

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sec^2(x)}{x\sqrt{x}}dx$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sin(x)}$
3. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}+2}{x+6}dx$

Problema 4**

Sea $\alpha > 0$. Muestre que la siguiente integral impropia no converge:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\alpha x}{\pi(\alpha^2+x^2)}\,dx.$$

Más aún, muestre que si f y g son funciones crecientes, que no se anula, y tal que $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty} g(t) = \infty$, entonces el límite

$$\lim_{t\to\infty} \int_{-g(t)}^{f(t)} \frac{\alpha x}{\pi(\alpha^2 + x^2)}\, dx,$$

de existir, puede ser cualquier número real, -∞, o ∞, dependiendo de f y g. ¿En qué caso es 0?

Problema 5

Considere la función $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. Muestre que

$$\int_0^\infty f(x)dx$$

es convergente.

Hint: *Integre por partes, utilizando* $1 - \cos x$ *como antiderivada para* $\sin x$.

Problemas Propuestos

Problema Propuesto 1

Encuentre el valor de la constante C para la cual la integral converge. Evalúe la integral para el valor de C.

$$\int_0^\infty \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{C}{3x+1}\right)$$

Problema Propuesto 2

Estudie la convergencia de las siguientes integrales:

1. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan(x)}{2+e^x}dx$
2. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{x^3+1}dx$
3. $\displaystyle\int_0^\infty \sin(x^2)dx$

   Hint: *Recuerde la resolución del problema 4.*

Problema Propuesto 3

Evalúe la integral

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx$$

para $n = 1, 2$, y 3. Conjeture el valor de la integral cuando n es un entero positivo arbitrario.
Propuesto: Demuestre su conjetura ocupando inducción.