Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
MAT1620 – Cálculo 2
Segundo Semestre del 2025

Ayudantía 7

Funciones en varias variables, límites y continuidad

Problema 1

Dibuje un mapa de contorno de la función mostrando varias curvas de nivel.

a) $f(x,y) = \ln\left(x^2 + 4y^2\right)$

b) $f(x,y) = \sqrt{y^2 - x^2}$

Problema 2

Analice los siguientes límites. Si el límite existe calcúlelo, si el límite no existe demuéstrelo.

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{5y^4\cos^2(x)}{x^4+y^4}$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2\sin^2(y)}{x^2+2y^2}$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$

Problema 3

a) Demuestre que $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$, con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, es continua.

b) Para $a, b, c \in \mathbb{R}$, defina $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{ax^4+by^2}{x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ c & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ tal que f es continua en todo $\mathbb{R}^2$.

Problema 4

Estudie la continuidad de las siguientes funciones en $(0,0)$:

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y^3}{x^4+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+xy+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Problema 5* - Distintos límites en dos variables

Sea $f : S \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, se dice que el límite doble $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y)$ es igual a L si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que, si $0 < |x - x_0| < \delta$ y $0 < |y - y_0| < \delta$, entonces $|f(x,y) - L| < \varepsilon$. También, usando las nociones de límite en una variable, se pueden definir los límites iterados $\lim\limits_{x\to x_0}(\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y))$ y $\lim\limits_{y\to y_0}(\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y))$.

a) Demuestre que, si existe $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ (el límite clásico), entonces $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y)$ también existe y es igual al límite usual.
Bonus: Encuentre un contraejemplo al recíproco.

b) Demuestre que, si existen $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y)$, $\lim\limits_{x\to x_0}(\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y))$ y $\lim\limits_{y\to y_0}(\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y))$, entonces estos tres límites son iguales.
Bonus: Demuestre que, para $f(x,y) = (x+y)\sin(\frac{1}{x})\sin(\frac{1}{y})$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe pero los límites iterados no.

Problema Propuesto 1

Estudie la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{2x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

b) $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x-y}{x+y} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Problema Propuesto 2

Dibuje un mapa de contorno (curvas de nivel) para las siguientes funciones:

a) $f(x,y) = (y-2x)^2$

b) $f(x,y) = x^2 + y^2$

Problema Propuesto 3

Demuestre que $f(\mathbf{x}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{x}$. Con $\mathbf{v},\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, es continua.

Problema Propuesto 4

Calcule los siguientes límites o demuestre que no existen:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4-4y^2}{x^2+2y^2}$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3y^4}{x^4+y^4}$