1. Determine si los siguientes límites existen.

(a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4 - 4y^2}{x^2 + 2y^2}$.

(b) $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{xy - y}{(x-1)^2 + y^2}$.

(c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

(d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2)\ln(x^2 + y^2)$.

a) Usando coordenadas polares ($x = r\cos(\theta)$, $y = r\operatorname{sen}(\theta)$ $\Rightarrow r^2 = x^2 + y^2$), podemos transformar el límite de $(x,y)\to(0,0)$ a un límite 1-D, $r \to 0$, y ver si el resultado depende o no de θ:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 - 2y^2}{x^2 + 2y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^4\cos^4(\theta) - 2r^2\operatorname{sen}^2(\theta)}{r^2\cos^2(\theta) + 2r^2\operatorname{sen}^2(\theta)}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^2(r^2\cos^4(\theta) - 2\operatorname{sen}^2(\theta))}{r^2(\cos^2(\theta) + 2\operatorname{sen}^2(\theta))} = \frac{-2\operatorname{sen}^2(\theta)}{1 + \operatorname{sen}^2(\theta)}$$

Como el límite tendrá valores distintos dependiendo de la dirección (θ) que escojamos, el límite no existe.

b) $$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{xy - y}{(x-1)^2 + y^2} = \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y(x-1)}{(x-1)^2 + y^2}$$

$$= \lim_{(t,y)\to(0,0)} \frac{yt}{t^2 + y^2}$$

$\to t = r\cos(\theta)$

$y = r\operatorname{sen}(\theta)$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^2\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)}{r^2} = \cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta)$$

Como depende de θ, el límite no existe

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta)}{r}$

$= \lim_{r\to 0} r\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta) = 0$

El límite sí existe, y da 0

d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) = \lim_{r\to 0} r^2\ln(r^2)$ $\quad t = r^2$

$= \lim_{t\to 0^+} t\ln(t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln(t)}{1/t}$ $\quad \to$ "$\frac{-\infty}{\infty}$"

L'H $= \lim_{t\to 0^+} \frac{1/t}{-1/t^2} = -\lim_{t\to 0^+} t = 0$

El límite existe

2. Determine el conjunto donde la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{2x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

es continua.

Como f es una función racional fuera del (0,0), es continua (dado que su denominador no se indetermina), así que solo es necesario revisar continuidad en (0,0)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{2x^2+y^2}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2(\theta)\, r^3 \operatorname{sen}^3(\theta)}{2r^2\cos^2(\theta) + r^2\operatorname{sen}^2(\theta)} = \lim_{r\to 0} \frac{r^5\cos^2(\theta)\operatorname{sen}^3(\theta)}{r^2(2\cos^2(\theta)+\operatorname{sen}^2(\theta))}$$

$$= \lim_{r\to 0} r^3 \cdot \frac{\cos^2(\theta)\operatorname{sen}^3(\theta)}{1+\cos^2(\theta)} = 0$$

$f(0,0) \neq \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, por lo que f es continua en $\mathbb{R}^2 - \{0,0\}$

3. Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Encuentre, en caso que existan, $f_x(0,0)$ y $f_y(0,0)$.

No queda de otra, hay que hacerlo por def:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{F(0+h,0) - F(0,0)}{h} \quad (F(0,0)\to 0)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^3\cdot 0 - h\cdot 0^3}{h^2+0^2}\cdot\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h^3} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{F(0,0+h) - F(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{0^3\cdot h - 0\cdot h^3}{0^2+h^2}\cdot\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0$$

$$\Rightarrow \quad f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$$

* Notemos que f es cont. en (0,0):

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^4\cos(\theta)\sin(\theta)(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))}{r^2}$$

$$= \lim_{r\to 0} r^2\cdot\frac{1}{2}\sin(2\theta)\cos(2\theta) = 0 = f(0,0)$$

4. Calcule las primeras derivadas parciales de las siguientes funciones:

a) $f(x,y) = y^5 - 3xy$.

b) $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$.

c) $f(x,y) = x^2 y e^{3xy}$.

d) $f(x,y,z) = x^2 y \cos(z/x)$.

a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 0 - 3y$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 5y^4 - 3x$

b) $\frac{\partial f}{\partial x} = 1/y$

$\frac{\partial f}{\partial y} = -x/y^2$

c) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy e^{3xy} + x^2 y \cdot 3y e^{3xy}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 e^{3xy} + x^2 y \cdot 3x e^{3xy}$

d) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \cos(z/x) + x^2 y \cdot -\operatorname{sen}(z/x) \cdot \frac{-z}{x^2}$

$= 2xy \cos(z/x) + yz \operatorname{sen}(z/x)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \cos(z/x)$

$\frac{\partial f}{\partial z} = x^2 y \cdot -\operatorname{sen}(z/x) \cdot \frac{1}{x} = -xy \operatorname{sen}(z/x)$