Ayudantía 2

isabel.kreimerman@gmail.com



Problema 1

Determine si la sucesión converge o diverge.

a) $a_n = 1 - (0{,}2)^n$

b) $a_n = \dfrac{3 + 5n^2}{n + n^2}$

c) $a_n = \dfrac{n^2}{\sqrt{n^3 + 4n}}$

d) $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1} n}{n + \sqrt{n}}$

e) $a_n = \{0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, \ldots\}$

a) $a_n = 1 - (0{,}2)^n$

Recordamos que:

1 Definición Una sucesión $\{a_n\}$ tiene el **límite** L y lo expresamos como

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \qquad \text{o} \qquad a_n \to L \text{ cuando } n \to \infty$$

si podemos hacer que los términos a_n se aproximen a L tanto como se quiera tomando n lo suficientemente grande. Si $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe, se dice que la sucesión **converge** (o que es **convergente**). De lo contrario, se dice que la sucesión **diverge** (o es **divergente**).

por lo tanto:

$$\lim_{n\to\infty} 1 - (0{,}2)^n = 1 - 0 = 1$$

∴ converge

b) $a_n = \dfrac{3 + 5n^2}{n + n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2 + 3}{n^2 + n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(5 + \frac{3}{n^2}\right)}{n^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5 + \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}}$$

$$= 5$$

∴ converge

c) $a_n = \dfrac{n^2}{\sqrt{n^3+4n}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^3+4n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^3\left(1+\frac{4}{n^2}\right)}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^{3/2}\sqrt{\left(1+\frac{4}{n^2}\right)}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{1+\frac{4}{n^2}}}$$

$$= \infty$$

$\therefore$ diverge

d) $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}\, n}{n+\sqrt{n}}$

consideremos todos los n impares:

$$\Rightarrow \frac{n}{n+\sqrt{n}} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+\sqrt{n}} = 1$$

consideremos todos los n pares

$$\Rightarrow \frac{-n}{n+\sqrt{n}} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{-n}{n+\sqrt{n}} = -1$$

Entonces, la sucesión tiene terminos (impares) que se acercan a $+1$ y terminos (pares) que se acercan a -1. $\therefore$ diverge

e) $a_n = \{0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, \dots\}$

Notar que la sucesión oscila entre dos valores, pero nunca se acerca lo suficiente a ninguno. ∴ diverge

Problema 2

Si se depositan 100 dólares al final de cada mes en una cuenta que paga 3 % de interés al año capitalizado mensualmente, la cantidad de interés acumulado después de n meses está dada por la sucesión

$$I_n = 100\left(\frac{1{,}0025^n - 1}{0{,}0025} - n\right)$$

a) Encuentre los primeros seis términos de la sucesión.

b) ¿Cuánto interés habrá obtenido después de dos años?

a)

n	In
1	0
2	0,25
3	0,75
4	1,5
5	2,51
6	3,76

b) 2 años = 24 meses

$$I_{24} = 100\left(\frac{1{,}0025^{24} - 1}{0{,}0025} - 24\right)$$

$$= 70{,}28$$

Problema 3

Determine si la sucesión es creciente, decreciente o es no monótona. ¿Está acotada la sucesión?

a) $a_n = \dfrac{2n-3}{3n+4}$ b) $a_n = ne^{-n}$

a) $a_n = \dfrac{2n-3}{3n+4}$ podemos comparar con una función

$$f(x) = \frac{2x-3}{3x+4} \qquad f'(x) = \frac{2(3x+4) - 3(2x-3)}{(3x+4)^2}$$

$$= \frac{17}{(3x+4)^2} > 0$$

entonces $a_n \geq a_1$ para $n \geq 1$

$\therefore$ creciente

además

$$\frac{2x-3}{3x+4} < \frac{2x-3}{3x} < \frac{2x}{3x} < \frac{2}{3} \qquad \text{para } n \geq 1$$

y notar que

$$-\frac{1}{7} = a_1 \leq a_n$$

$\therefore$ acotada

b) $a_n = n e^{-n}$ lo comparamos con una función

$$f(x) = \frac{x}{e^x} \qquad f'(x) = \frac{e^x - x e^x}{e^{x^2}}$$

$$= \frac{e^x (1-x)}{e^x \cdot e^x}$$

$$= \frac{1-x}{e^x} < 0 \qquad \text{para } x > 1$$

$\therefore$ decreciente

Notar que : $a_n = \frac{n}{e^n}$ como $n \geq 1$

$$0 < a_n \qquad a_n < a_1 = \frac{1}{e}$$

$\therefore$ acotada

$\therefore$ acotada