Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
MAT1620 – Cálculo 2
Segundo Semestre del 2025

Ayudantía 7

Funciones en varias variables, límites y continuidad

Problema 1

Dibuje un mapa de contorno de la función mostrando varias curvas de nivel.

a) $f(x,y) = \ln\big(x^2 + 4y^2\big)$

b) $f(x,y) = \sqrt{y^2 - x^2}$

Respuesta

a) $f(x,y) = \ln\big(x^2 + 4y^2\big)$

La función ln es estrictamente creciente. Por lo tanto,

$$f(x,y) = c \iff \ln(x^2 + 4y^2) = c \iff x^2 + 4y^2 = e^c$$

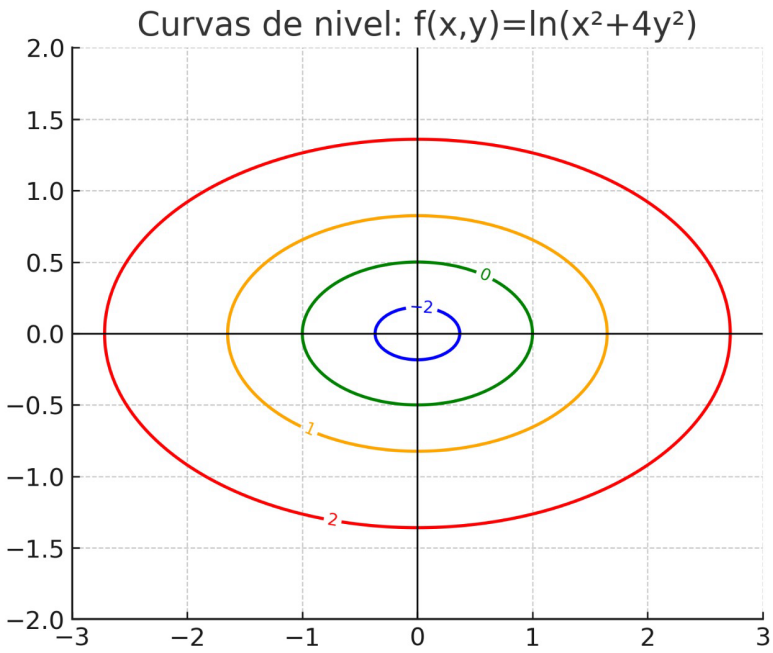
Vemos como esto es una elipse centrada en el origen. Al dividir por e^c obtenemos su forma estándar:

$$\frac{x^2}{e^c} + \frac{y^2}{e^c/4} = 1,$$

de modo que los semiejes son

$$a = \sqrt{e^c} \quad \text{(horizontal)}, \qquad b = \sqrt{e^c/4} = \tfrac{1}{2}\sqrt{e^c} \quad \text{(vertical)}.$$

El **dominio** de f exige $x^2 + 4y^2 > 0$; la función *no* está definida en el origen. Geométricamente, al aumentar c crece e^c y las elipses se *expanden*; si $c \to -\infty$, se contraen hacia el origen (punto excluido).



b) $f(x,y) = \sqrt{y^2 - x^2}$

Dominio: el argumento de la raíz debe ser no negativo,

$$y^2 - x^2 \geq 0 \iff |y| \geq |x|.$$

Esto corresponde a las dos regiones por encima de la recta $y = x$ y por debajo de $y = -x$ (incluyendo ambas rectas).

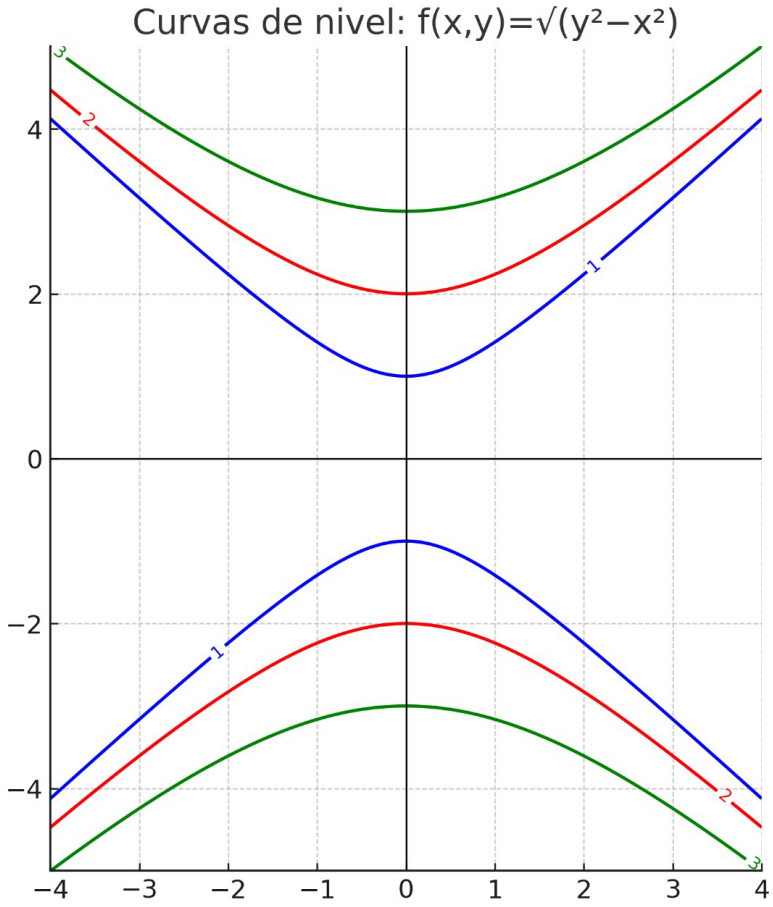
Para el mapa de contorno, fijamos $c \geq 0$ (porque $f \geq 0$) y resolvemos

$$\sqrt{y^2 - x^2} = c.$$

Como ambos lados son no negativos, y elevamos al cuadrado ambos lados:

$$y^2 - x^2 = c^2 \iff \frac{y^2}{c^2} - \frac{x^2}{c^2} = 1.$$

Notamos que es una hipérbola centrada en el origen que abre en dirección del eje y (ramas superior e inferior). Las asíntotas son $y = \pm x$, y el nivel cero ($c = 0$) coincide exactamente con el borde del dominio ($y^2 - x^2 = 0 \iff y = \pm x$).


Curvas de nivel: f(x,y)=√(y²−x²)
4
2
0
−2
−4
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
1
2
3
1
2
3

Problema 2

Analice los siguientes límites. Si el límite existe calcúlelo, si el límite no existe demuéstrelo.

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{5y^4\cos^2(x)}{x^4+y^4}$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2\sin^2(y)}{x^2+2y^2}$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$

Respuesta

a) Si nos aproximamos a (0,0) por el eje x, entonces $y=0$. Por lo tanto, tenemos que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5y^4\cos^2(x)}{x^4+y^4} = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x^4} = 0$$

Si nos aproximamos por el eje y, entonces $x=0$. Por lo tanto, tenemos que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5y^4\cos^2 x}{x^4+y^4} = \frac{5y^4}{y^4} = 5$$

Luego, como $f(x,y)$ tiene dos valores diferentes cuando nos acercamos por diferentes ejes, el límite de la función no existe.

b) Notemos que para $(x,y)\neq(0,0)$, se cumple lo siguiente:

$$0 \leq \frac{x^2}{x^2+2y^2} \leq 1 \to 0 \leq \frac{x^2\sin^2 y}{x^2+2y^2} \leq \sin^2 y$$

Nos daremos cuenta que $\sin^2 y \to 0$ cuando $(x,y)\to(0,0)$. Entonces:

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\sin^2 y}{x^2+2y^2} \leq 0$$

Quedando demostrado el valor del limite por teorema del sandwich.

c) Para resolver este ejercicio se puede utilizar dos metodos. Ya sea por coordenadas polares, o algebra elemental:

i) Metodo algebraico

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}\cdot\frac{\sqrt{x^2+y^2+1}+1}{\sqrt{x^2+y^2+1}+1} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{x^2+y^2}\\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} (\sqrt{x^2+y^2+1}+1)\\ &= 2\end{aligned}$$

ii) Coordenadas polares

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \lim_{r\to 0}\frac{r^2}{\sqrt{r^2+1}-1}\cdot\frac{\sqrt{r^2+1}+1}{\sqrt{r^2+1}+1} = \lim_{r\to 0}\sqrt{r^2+1}+1 = 2$$

Problema 3

a) Demuestre que $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$, con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, es continua.

b) Para $a, b, c \in \mathbb{R}$, defina $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{ax^4 + by^2}{x^2 + y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ c & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ tal que f es continua en todo $\mathbb{R}^2$.

Respuesta

a) Queremos demostrar que la función $f(\mathbf{x}) = \|x\|$ es continua, es decir, $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} \|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x_0}\|$. Para esto usamos la desigualdad $|\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{x_0}\|| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x_0}\|$. Dado $\varepsilon > 0$, queremos encontrar $\delta > 0$ tal que:

$$0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x_0}\| < \delta \Longrightarrow |\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{x_0}\|| < \varepsilon$$

Basta elegir $\delta = \varepsilon$. En efecto, si $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x_0}\| < \delta = \varepsilon$, entonces por la desigualdad mencionada, se tiene lo siguiente:

$$0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x_0}\| < \delta = \varepsilon \Longrightarrow |\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{x_0}\|| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x_0}\| < \varepsilon \Longrightarrow |\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{x_0}\|| < \varepsilon$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} \|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x_0}\|$.

b) f es continua en todo $\mathbb{R}^2 - (0,0)$, por lo que solo hay que analizar el origen. Se quiere que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = c$, vemos el eje x, para esto tomamos $y = 0$:

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{ax^4}{x^2} = \lim_{x\to 0} ax^2 = 0$$

De acá se deduce que $c = 0$. Veamos ahora el eje y, con $x = 0$ se tiene lo siguiente:

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{by^2}{y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{b}{y^2} = \begin{cases} +\infty & b > 0 \\ -\infty & b < 0 \\ 0 & b = 0 \end{cases}$$

Como queremos que el límite exista y sea 0, tomamos $b = 0$. Entonces la función queda de la siguiente forma:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{ax^4}{x^2 + y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Para ver el valor de a, vemos la función en coordenadas polares:

$$|f(x,y)| = |f(r\cos\theta, r\sin\theta)| = \left|\frac{ar^4\cos^4\theta}{r^2\cos^2\theta + r^4\sin^4\theta}\right| \leq \begin{cases} \left|\dfrac{ar^4\cos^4\theta}{r^2\cos^2\theta}\right| & \cos\theta \neq 0 \\ 0 & \cos\theta = 0 \end{cases}$$

Si $\cos\theta = 0$, la función vale 0, por lo que nos concentramos en el caso $\cos\theta \neq 0$:

$$|f(r\cos\theta, r\sin\theta)| \leq \left|\frac{ar^4\cos^4\theta}{r^2\cos^2\theta}\right| = |a|r^2\cos^2\theta \leq |a|r^2 \xrightarrow{r\to 0} 0$$

Por lo tanto $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \ \forall a \in \mathbb{R}$. Entonces $b = c = 0$ y a es un número real arbitrario.

b)

Problema 4

Estudie la continuidad de las siguientes funciones en $(0,0)$:

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y^3}{x^4+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+xy+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Respuesta

a) Queremos ver si $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. Vemos la función en coordenadas polares:

$$|f(x,y)| = |f(r\cos\theta, r\sin\theta)| = \left|\frac{2r^5\cos^2\theta\sin^3\theta}{r^4(\cos^4\theta+\sin^4\theta)}\right| = 2r\left|\frac{\cos^2\theta\sin^3\theta}{\cos^4\theta+\sin^4\theta}\right|$$

Para acotar esta expresión notamos que:

$$\begin{aligned}\cos^4\theta + \sin^4\theta &= \left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)^2 - 2\cos^2\theta\sin^2\theta \\ &= 1 - 2(\cos\theta\sin\theta)^2 = 1 - 2\left(\frac{\sin 2\theta}{2}\right)^2 = 1 - \frac{\sin^2 2\theta}{2}\end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}\sin^2 2\theta &\leq 1 \\ \frac{\sin^2 2\theta}{2} &\leq \frac{1}{2} \\ -\frac{\sin^2 2\theta}{2} &\geq -\frac{1}{2} \\ 1 - \frac{\sin^2 2\theta}{2} &\geq \frac{1}{2} \\ \cos^4\theta + \sin^4\theta &\geq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\cos^4\theta+\sin^4\theta} &\leq 2\end{aligned}$$

Entonces se tiene que:

$$|f(r\cos\theta, r\sin\theta)| = 2r\left|\frac{\cos^2\theta\sin^3\theta}{\cos^4\theta+\sin^4\theta}\right| = 2r\frac{\cos^2\theta\left|\sin^3\theta\right|}{\cos^4\theta+\sin^4\theta} \leq 4r\cos^2\theta\left|\sin^3\theta\right| \leq 4r \xrightarrow{r\to 0} 0$$

Entonces $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, por lo tanto f es continua en $(0,0)$.

b) Si vamos al origen por el eje x, entonces $y = 0$:

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2} = 0.$$

Ahora, si vamos por el camino $y = x$ tenemos lo siguiente:

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

Los límites son distintos, por lo tanto $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe, entonces $f(x,y)$ no es continua en 0.

Problema 5* - Distintos límites en dos variables

Sea $f : S \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, se dice que el límite doble $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ es igual a L si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que, si $0 < |x - x_0| < \delta$ y $0 < |y - y_0| < \delta$, entonces $|f(x,y) - L| < \varepsilon$. También, usando las nociones de límite en una variable, se pueden definir los límites iterados $\lim\limits_{x\to x_0}(\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y))$ y $\lim\limits_{y\to y_0}(\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y))$.

a) Demuestre que, si existe $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ (el límite clásico), entonces $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ también existe y es igual al límite usual.
Bonus: Encuentre un contraejemplo al recíproco.

b) Demuestre que, si existen $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$, $\lim\limits_{x\to x_0}(\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y))$ y $\lim\limits_{y\to y_0}(\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y))$, entonces estos tres límites son iguales.
Bonus: Demuestre que, para $f(x,y) = (x+y)\sin(\frac{1}{x})\sin(\frac{1}{y})$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe pero los límites iterados no.

Respuesta

Parte a)

Sea $L = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$. Entonces se tiene que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que:

$$0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \Longrightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon$$

Ahora, buscamos δ_0 que haga que:

$$(0 < |x - x_0| < \delta_0) \wedge (0 < |y - y_0| < \delta_0) \Longrightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon$$

Elevando al cuadrado se llega a lo siguiente:

$$\begin{aligned}(0 < (x-x_0)^2 < \delta_0^2) \wedge (0 < (y-y_0)^2 < \delta_0^2) &\Longrightarrow 0 < (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < 2\delta_0^2\\ &\Longrightarrow 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta_0\sqrt{2} = \delta\end{aligned}$$

Entonces tomamos $\delta_0 = \dfrac{\delta}{\sqrt{2}}$. Luego, para $\varepsilon > 0$, sabemos que se cumple la condición del límite normal $(0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta \Longrightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon)$. Con $\delta_0 = \dfrac{\delta}{\sqrt{2}}$ se tiene que:

$$\begin{aligned}\left(0 < |x - x_0| < \delta_0 = \frac{\delta}{\sqrt{2}}\right) \wedge \left(0 < |y - y_0| < \delta_0 = \frac{\delta}{\sqrt{2}}\right) &\Longrightarrow 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta\\ &\Longrightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = L$.

Bonus: Sea $f(x,y) = \begin{cases} 1 & (x = 0) \vee (y = 0) \\ 0 & (x \neq 0) \wedge (y \neq 0) \end{cases}$ Se tiene que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0$. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, cualquier $\delta > 0$ va a cumplir que:

$$(0 < |x| < \delta) \wedge (0 < |y| < \delta) \Longrightarrow |f(x,y)| = 0 < \varepsilon$$

Pero el límite en el sentido usual no existe, si nos movemos a $(0,0)$ por x (y por y también) tenemos que el límite da 1:

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

Sin embargo, el límite es distinto si vamos por el camino $y = x$:

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

Por lo tanto, el recíproco no es cierto.

Parte b)

Demostraremos que $\lim\limits_{y\to y_0}(\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = L$. Por la condición del límite doble, se sabe que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_1 > 0$ tal que, si $0 < |x - x_0| < \delta_1$ y $0 < |y - y_0| < \delta_1$, entonces $|f(x,y) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$. Luego, como existe $\lim_{x\to x_0} f(x,y)$ para y cerca de y_0 (debido a que el límite iterado existe), definimos $g(y) = \lim_{x\to x_0} f(x,y)$. Se tiene entonces que, para el mismo ε de la definición del límite doble, $\exists \delta_x(y)$ tal que:

$$0 < |x - x_0| < \delta_x(y) \Longrightarrow |f(x,y) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Luego, si $0 < |y - y_0| < \delta_1$ y $0 < |x - x_0| < \min(\delta_1, \delta_x(y))$, entonces $|f(x,y) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$. Usando la desigualdad triangular llegamos a lo siguiente:

$$|g(y) - L| = |g(y) - f(x,y) + f(x,y) - L| \leq |g(y) - f(x,y)| + |f(x,y) - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Entonces $0 < |y - y_0| < \delta_1 \Longrightarrow |g(y) - L| < \varepsilon$. Concluimos que $\lim\limits_{y\to y_0}(\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)) = L$. El caso del otro límite iterado es análogo.

Bonus: Calculamos $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left((x+y)\sin(\frac{1}{x})\sin(\frac{1}{y})\right)$:

$$\left|(x+y)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\sin\left(\frac{1}{y}\right)\right| \leq |x+y| \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$$

Por lo tanto $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. Veamos ahora los límites iterados, como la función es simétrica, solo es necesario ver 1:

$$\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0}(x+y)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\sin\left(\frac{1}{y}\right)$$

Este límite no existe, sea $a_n = \dfrac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2\pi n}$ y $b_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$. Se tiene que $a_n,\ b_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Calculamos $\lim_{n\to\infty} f(a_n, y)$ y $\lim_{n\to\infty} f(b_n, y)$:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f(a_n,y) &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{3\pi}{2}+2\pi n} + y\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)\sin\left(\frac{1}{y}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{3\pi}{2}+2\pi n} + y\right)\sin\left(\frac{1}{y}\right)\cdot -1 = -y\sin\left(\frac{1}{y}\right)\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} f(b_n, y) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} + y \right) \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \sin\left(\frac{1}{y}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} + y \right) \sin\left(\frac{1}{y}\right) \cdot 1 = y \sin\left(\frac{1}{y}\right)$$

Ambos límites son distintos, por lo tanto $\lim_{x\to 0} f(x, y)$ no existe, lo que implica que el límite iterado tampoco existe.

Problema Propuesto 1

Estudie la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{2x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

b) $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x-y}{x+y} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Respuesta

a) Para determinar si la función $f(x,y)$ es continua se calcula su límite por coordenadas polares.

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{r\to 0} f(r,\theta) \\ &= \left| \frac{r^5 \cos^2\theta \sin^3\theta}{r^2(2\cos^2\theta + \sin^2\theta)} \right| \\ &= r^3 \left| \frac{\cos^2\theta \sin^3\theta}{2\cos^2\theta + \sin^2\theta} \right| \\ &= r^3 \left| \frac{\cos^2\theta \sin^3\theta}{2\cos^2\theta + (1-\cos^2\theta)} \right| \\ &= r^3 \left| \frac{\cos^2\theta \sin^3\theta}{1+\cos^2\theta} \right| \\ &\leq r^3 \left| \cos^2\theta \sin^3\theta \right| \\ &\leq r^3 \xrightarrow{r\to 0} 0 \end{aligned}$$

Ya que el límite existe y toma el mismo valor desde todos los tramos, la función $f(x,y)$ es continua en $(0,0)$.

b) En primer lugar vemos el límite en la trayectoria $x, y = 0$.

$$\lim_{x\to 0} g(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$$

Ahora vemos el límite desde la dirección $(y, x = 0)$.

$$\lim_{y\to 0} g(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{-1}{1} = -1$$

Debido a que el límite desde distintas trayectorías posee distinto valor, $g(x,y)$ no es continua en $(0,0)$.

Problema Propuesto 2

Dibuje un mapa de contorno (curvas de nivel) para las siguientes funciones:

a) $f(x, y) = (y - 2x)^2$

b) $f(x, y) = x^2 + y^2$

Respuesta

Consideremos el dominio acotado:

$$x \in [-5, 5], \quad y \in [-5, 5]$$

y las siguientes funciones:

1. $f(x, y) = (y - 2x)^2$

Las curvas de nivel se obtienen igualando la función a una constante c:

$$(y - 2x)^2 = c$$

Esto se resuelve como:

$$y - 2x = \pm\sqrt{c}$$

Análisis con valores específicos de c:

- $\underline{c = 0}$:

$$y - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 2x$$

  Es una recta.

- $\underline{c = 1}$:

$$y - 2x = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad y = 2x + 1 \quad \text{y} \quad y = 2x - 1$$

  Son dos rectas paralelas desplazadas.

- $\underline{c = 4}$:

$$y - 2x = \pm 2 \quad \Rightarrow \quad y = 2x + 2 \quad \text{y} \quad y = 2x - 2$$

- $\underline{c = 9}$:

$$y - 2x = \pm 3 \quad \Rightarrow \quad y = 2x + 3 \quad \text{y} \quad y = 2x - 3$$

Observación:

- Los valores de c que son **cuadrados perfectos** son útiles porque permiten encontrar $\sqrt{c}$ fácilmente y escribir las rectas de forma exacta.
- Se puede observar que se cumple
$$y - 2x = \pm k$$
para todo k perteneciente a los naturales

Teniendo esto en mente se obtiene:

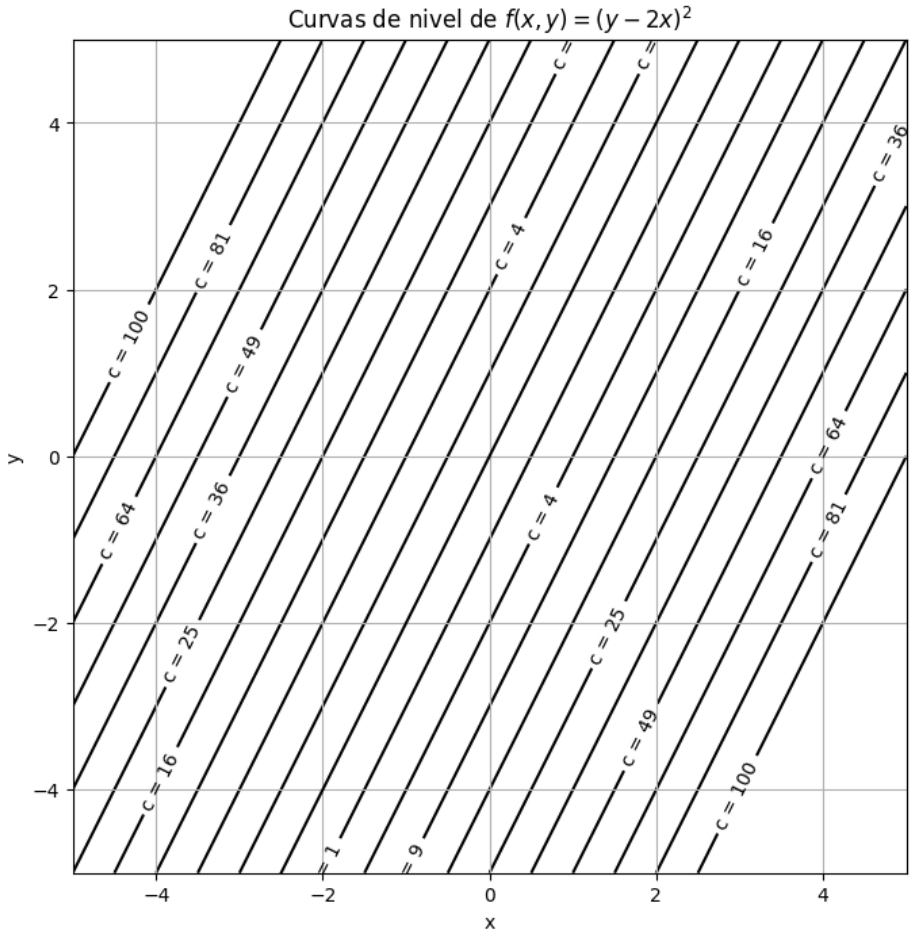


Figure 1: Curvas de nivel de $f(x,y) = (y-2x)^2$.

2. $f(x,y) = x^2 + y^2$

Las curvas de nivel se obtienen igualando la función a una constante c:

$$x^2 + y^2 = c$$

Esto es la ecuación de una **circunferencia** con:

- **Centro:** $(0,0)$

- **Radio:** $\sqrt{c}$

Ejemplos:

- $c = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 1 \quad \text{Radio} = 1$
- $c = 4 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 4 \quad \text{Radio} = 2$
- $c = 9 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 9 \quad \text{Radio} = 3$

Observación:
Similar al caso anterior, los valores de c que son **cuadrados perfectos** son útiles porque permiten encontrar $\sqrt{c}$ y graficar las circunferencias más fácilmente.

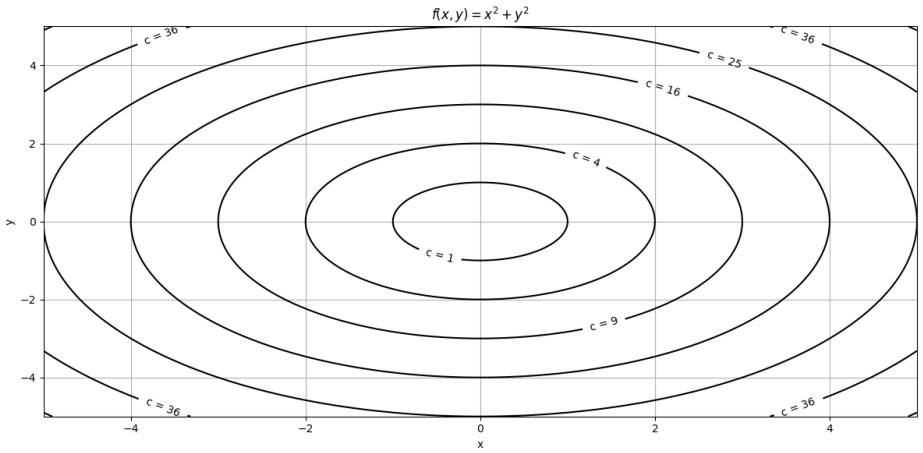


Figure 2: Curvas de nivel de $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Problema Propuesto 3

Demuestre que $f(\mathbf{x}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{x}$. Con $\mathbf{v},\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, es continua.

Respuesta

Queremos probar que $\lim x \to x_0 f(x) = f(x_0) = v \cdot x_0$.

Dado que $\epsilon > 0$, buscamos $\delta > 0$ tal que $0 < ||x - x_0|| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Notemos que $|f(x) - f(x_0)| = |v \cdot x - v \cdot x_0| = |v \cdot (x - x_0)|$, sabemos para a y b vectores.

Se tiene que $a \cdot b = ||a|| \cdot ||b|| \cos\theta$ con θ el ángulo entre a y b.

$$\begin{aligned} \Rightarrow |v \cdot (x - x_0)| &= ||\vec{v}|| \cdot ||x - x_0|| \cdot |\cos\theta| \\ &\leq ||\vec{v}|| \cdot ||x - x_0|| \\ &< ||\vec{v}||\delta = \epsilon \\ &\Rightarrow \delta = \frac{\epsilon}{||\vec{v}||} \end{aligned}$$

Luego, para $\epsilon > 0$ elegimos $\delta = \frac{\epsilon}{||\vec{v}||}$.

$$\begin{aligned} 0 < ||x - x_0|| < \delta &= \frac{\epsilon}{||\vec{v}||} \\ \Rightarrow |v \cdot x - v \cdot x_0| &= |v \cdot (x - x_0)| \\ = ||v|| \cdot ||x - x_0|| \cdot |\cos\theta| \\ \leq ||\vec{v}|| \cdot ||x - x_0|| \\ < ||\vec{v}|| \cdot \frac{\epsilon}{||\vec{v}||} &= \epsilon \\ \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) &= v \cdot x_0 \end{aligned}$$

Problema Propuesto 4

Calcule los siguientes límites o demuestre que no existen:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4-4y^2}{x^2+2y^2}$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3y^4}{x^4+y^4}$

Respuesta

a) Se realiza un cambio a coordenadas polares y se obtiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r} = \lim_{r\to 0} r\cos\theta\sin\theta = 0$$

b) Si nos aproximamos a (0,0) por el eje x, entonces y = 0. Por lo tanto, tenemos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-4y^2}{x^2+2y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^2} = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$$

Si nos aproximamos por el eje y, entonces x = 0. Por lo tanto, tenemos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-4y^2}{x^2+2y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{-4y^2}{2y^2} = -2$$

Por lo tanto, el límite no existe.

c) Notemos que para todo (x,y) $\neq$ (0,0) se cumple que

$$\frac{y^4}{x^4+y^4} \leq 1$$

Por lo tanto

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{x^3y^4}{x^4+y^4}\right| \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|x^3\right| = 0$$

Por teorema del sándwich, se obtiene que

$$\lim_{(x,)\to(0,0)} \frac{x^3y^4}{x^4+y^4} = 0$$