Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
MAT1620 – Cálculo 2
Segundo Semestre del 2025

Ayudantía 13

Coordenadas polares e integrales triples

Problema 1

Calcule las siguientes integrales dobles:

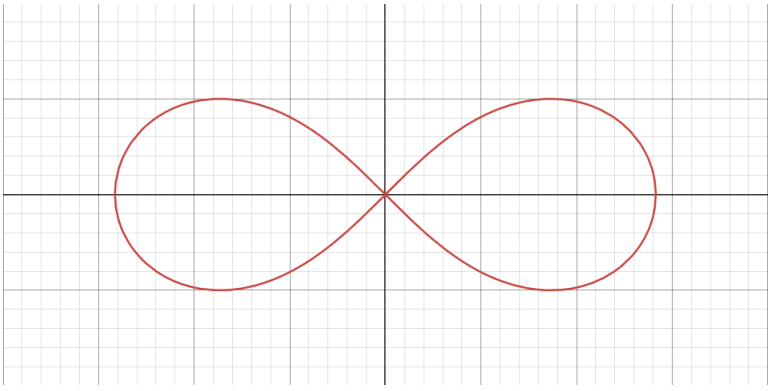
1. $\iint_R \arctan\left(\frac{y}{x}\right) dA$. Donde R es la región delimitada por $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$, $y=x$ e $y=\sqrt{3}x$ en el primer cuadrante.
2. $\iint_R \sqrt{a^2-x^2-y^2}\, dA$. Donde R es el círculo delimitado por $x^2+y^2=a^2$.

Problema 2

La curva cuya ecuación es

$$\left(x^2+y^2\right)^2 = 2a^2\left(x^2-y^2\right)$$

se llama lemniscata de Bernoulli, tiene el siguiente aspecto gráfico:



Calcule el área de la lemniscata de Bernoulli.

Problema 3

Sea R el tetraedro formado por los planos coordenados y el plano $z = 1 - x - y$. Calcular:

$$\iiint_R xyz \, dA$$

Problema 4*

Considere la integral, definida sobre todo el plano $\mathbb{R}^2$,

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \, dA := \lim_{a\to\infty} \iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)} \, dA,$$

donde $D_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2\}$ es el disco cerrado con radio a y centro en el origen. Demuestre que $I = \pi$. Relacione este resultado con la integral gaussiana ($\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$).
Nota: este es un ejemplo de una integral impropia en $\mathbb{R}^2$.

Problema Propuesto 1

Encuentre la masa y el centro de masa del sólido E con la función de densidad dada por ρ. E esta acotada por el cilindro parabólico $z = 1 - y^2$ y los planos $x + z = 1$, $x = 0$ y $z = 0$; $\rho(x, y, z) = 4$.