Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
MAT1620 – Cálculo II
Segundo Semestre 2025

Ayudantía 3

Series

Problema 1

Determine si las siguientes series convergen.

a) $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{\left(n^3+4\right)(n-2)}{(n-3)(n^5+1)}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

c) $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))}$

Problema 2

Aproxime la serie por sus primeros cinco términos, estime el error y determine cuantos terminos se deben sumar para obtener un error absoluto menor a 0.0001.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4+1}}$

Problema 3

Demuestre que si $a_n > 0$ y $\lim_{n\to\infty} na_n \neq 0$ entonces $\sum_{1}^{\infty} a_n$ diverge.

Problema 4*: Copo de Koch

Parta de un triángulo equilátero de lado 1. En cada iteración, a cada lado se le elimina el tercio central y se lo reemplaza por los otros dos lados de un triángulo equilátero "hacia afuera". Denote por P_n el perímetro, A_n el área, y por ΔP_n, ΔA_n los incrementos en el paso n.

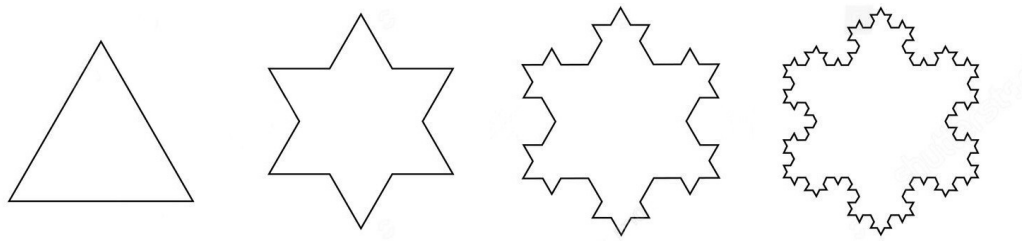


Figure 1: Copo de Koch

a) Describa cómo crece el número de segmentos s_n y cómo cambia su longitud ℓ_n. Obtenga una expresión para el perímetro P_n. ¿Converge a un valor? Concluya usando criterios vistos en clase.

b) Indique la cantidad de "puntas" nuevas Δq_n que aparecen en el paso n y su área a_n; plantee $\sum_{k\geq 1} \Delta A_k$ y establezca su convergencia por un criterio. Proponga un valor para el área A_∞ del copo de Koch.

c) ¿Puede la curva límite contener algún segmento recto de longitud positiva? Justifique en palabras relacionándolo con la iteración.

d) **Propuesto:** Partiendo de un triángulo equilátero de lado 1. En cada iteración, cada segmento se reemplaza por 4 subsegmentos de longitud $r\ell_n$ con $0 < r < \frac{1}{2}$, manteniendo los segmentos laterales colineales al original y los centrales se despliegan hacia afuera. Usando criterios de convergencia, determine para qué r el perímetro converge y para qué r el área converge.

Problema 5

Determine los valores de p para los cuales la siguiente serie converge,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)^p}$$