1. a) Sea u el vector v normalizado

$$\|v\| = (1^2 + 1^2 + (-1)^2)^{1/2}$$

$$= \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow u = \frac{v}{\|v\|} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle$$

La razon de combio pedida corresponde a

$$\nabla V(P) \cdot u$$

obtengamos ∇V

$$\nabla V = \begin{pmatrix} 10x - 3y + yz \\ -3x + xz \\ xy \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \nabla V(P) = \nabla V(3,4,5) = \langle 38, 6, 12 \rangle$$

Finalmente

$$\nabla V(P) \cdot u = \begin{pmatrix} 38 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{32}{\sqrt{3}}$$

1. b) Desde P, V cambia con mayor rapidez en la dirección del vector $\nabla V(P)$

1. c) Con el punto anterior obtenemos que la mayor razon de cambio se logra cuando

$$\nabla V(P) \cdot \frac{\nabla V(P)}{\|\nabla V(P)\|} = \frac{\nabla V(P) \cdot \nabla V(P)}{\|\nabla V(P)\|} = \frac{\|\nabla V(P)\|^2}{\|\nabla V(P)\|}$$

$$= \|\nabla V(P)\| = (38^2 + 6^2 + 12^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1624}$$

2) Primero calculamos las primeras derivadas

$$f_x(x,y) = y - \frac{1}{x^2}$$

$$f_y(x,y) = x - \frac{1}{y^2}$$

luego, los puntos críticos están dados por el siguiente sistema de ecuaciones

i) $y - \frac{1}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow y = \frac{1}{x^2}$

ii) $x - \frac{1}{y^2} = 0 \quad \Rightarrow x = \frac{1}{y^2}$

reemplazando (i) en (ii)

$$x - x^4 = 0$$

$$\Rightarrow x(1 - x^3) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, \; x = 1.$$

Como $x = 0$ no pertenece al dominio de f lo descartamos, luego

$$x = 1 \Rightarrow y = 1.$$

Nuestro único punto crítico es el $(1,1)$. Para clasificar el punto analicemos la matriz H. obtengamos las segundas derivadas.

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{2}{y^3} \end{pmatrix}$$

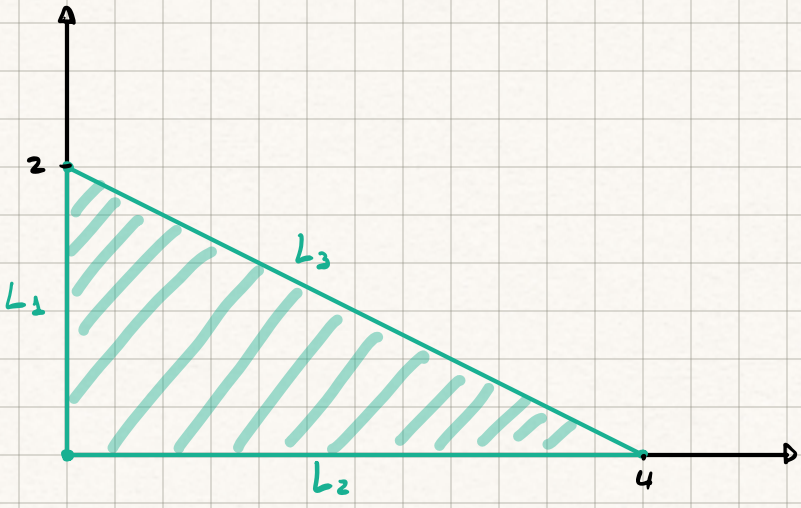
$$\Rightarrow H(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Su determinante es

$$|H(1,1)| = 4 - 1 = 3 > 0$$

como $f_{xx}(1,1) = 2 > 0$ se concluye que $(1,1)$ es mínimo local.

3) Grafiquemos la región para tener una mejor intuición.



$L_1 : x = 0$

$L_2 : y = 0$

$L_3 : y = 2 - \frac{x}{2}$

Veamos los puntos críticos de f

$$f_x(x,y) = 1 - y \qquad f_y(x,y) = 1 = x$$

Notamos que el único punto crítico es el $(1,1)$, el cual no se encuentra en D (esta por arriba de L_3). Veamos lo que ocurre en los bordes.

L_1) Evaluando f en L_1 obtenemos

$$f(0,y) = y$$

el máximo de L_1 es $(0,2)$ y el mínimo $(0,0)$.

L_2) Evaluando f en L_2 obtenemos

$$f(x,0) = x$$

el máximo de L_2 es $(4,0)$ y el mínimo $(0,0)$.

L_3) Solo nos queda verificar la recta L_3, evaluando obtenemos

$$f(x, 2 - \frac{x}{2}) = x + 2 - \frac{x}{2} - 2x + \frac{x^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 2$$

Derivamos e igualamos a 0

$$x - \frac{3}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{3}{2}$$

luego en L_3 hay un "punto crítico" en $(\frac{3}{2}, \frac{5}{4})$, con un valor de

$$f(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}) = \frac{7}{8}$$

Viendo los extremos de L_3 $((4,0), (0,2))$, comprobamos que su máximo es en $(4,0)$ y el mínimo en $(\frac{3}{2}, \frac{5}{4})$.

De manera global en D, el máximo es $f(0,4) = 4$ y el mínimo es $f(0,0) = 0$.

4) Podemos modelarlo de la siguiente manera. Nuestra función objetivo será $f(x,y,z) = xyz$. La restricción es $g(x,y,z) = 0$ con $g(x,y,z) = x + y + z - 100$. Luego

$$\nabla f = \langle yz, xz, xy \rangle$$

$$\nabla g = \langle 1, 1, 1 \rangle$$

Planteamos el multiplicador de Lagrange

$$\nabla f = \lambda \nabla g \qquad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &i) \quad yz = \lambda \\ &ii) \quad xz = \lambda \\ &iii) \quad xy = \lambda \\ &iv) \quad x + y + z = 100 \end{aligned}$$

$$g = 0$$

De (i), (ii), (iii) se obtiene que $x = y = z$, por (iv) concluimos que

$$x = y = z = \frac{100}{3}$$

5) Modelamos la restricción como $g(x,y) = x^2 + y^2 - 10$.

$$\nabla f(x,y) = \langle 3, 1 \rangle$$

$$\nabla g(x,y) = \langle 2x, 2y \rangle$$

Planteamos los multiplicadores de Lagronge

$$\nabla f = \lambda \nabla g \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{l} i)\ 3 = \lambda \cdot (2x) \\ ii)\ 1 = \lambda\,(2y) \\ iii)\ x^2 + y^2 = 10 \end{array}$$

$$g = 0$$

de (i) y (ii) se desprende que $3y = x$. reemplazando en (iii)

$$(3y)^2 + y^2 = 10$$

$$\Rightarrow \qquad y = \pm 1$$

Luego, los posibles valores extremos están en $(3,1)$ y en $(-3,-1)$. Evaluando, tenemos $f(3,1) = 10$ y $f(-3,-1) = -10$. Entonces el máximo y mínimo de f sobre la curva esta dado por 10 y -10 respectivamente.