Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
MAT1620 – Cálculo II
Segundo Semestre 2025

# Ayudantía 11

Multiplicadores de Lagrange. Integrales Dobles sobre Regiones Rectangulares

---

## Problema 1

Encuentre los máximos y mínimos de la función:

$$f(x, y, z) = 3x + 6y + 9z$$

sujeta a la siguiente restricción:

$$g(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 = 16$$

## Problema 2

a) Mediante multiplicadores de Lagrange, demuestre que el rectángulo de área máxima y de perímetro fijo $p$ es un cuadrado y calcule su medida con respecto a $p$.

b) El plano $4x - 3y + 8z = 5$ forma una elipse al intersecar el cono $z^2 = x^2 + y^2$. Encuentre el punto más alto y más bajo de la elipse.

## Problema 3

Evalúe la siguiente integral doble:

$$I = \iint_R (x^2 + y^2)\, dA,$$

donde la región $R$ está definida por el rectángulo

$$R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2,\ 1 \leq y \leq 3\}.$$

## Problema 4 ($\star$)

Sea $A$ una matriz simétrica no nula de $3\times 3$. Considere la función $f(\vec{x}) = \dfrac{1}{2}(A\vec{x})\cdot\vec{x}$

a) Calcule $\nabla f$.

b) Considere la restricción de $f$ a la esfera unitaria $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ en $\mathbb{R}^3$. Suponga que $f$ tiene un máximo y un mínimo en $S$. Muestre que debe haber un $\vec{x} \in S$ y un $\lambda \neq 0$ tales que $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$.

## Problema 5 (Propuestos)

a) Si la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ debe encerrar al círculo $x^2 + y^2 = 2y$, ¿qué valores de $a$ y $b$ minimizan el área de la elipse?

b) Considere la función $f : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) := \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 2y & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Calcule, si es que existe, $\displaystyle\int_0^1 \left( \int_0^1 f(x, y)\, dy \right) dx$.