Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
MAT1620 – Cálculo 2
Segundo Semestre del 2025

Solución Ayudantía 1

Integrales impropias

Problema 1

La integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx$$

es impropia por dos razones: el integrando tiene una asíntota vertical en $x = 0$ y el intervalo de integración es no acotado. Resuélvala separándola en dos integrales, una en el intervalo $[0, a]$ y otra en el intervalo $[a, \infty)$ $(a \in (0, \infty))$.

Respuesta

Sea $a > 0$, se tiene que:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx = \int_0^a \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx + \int_a^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx.$$

Ahora, vamos a resolver cada integral por separado. Para la primera integral, tenemos:

$$\int_0^a \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx = \lim_{t\to 0}\int_t^a \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx$$

Usando el cambio de variable $x = u^2$, $dx = 2u\,du$, $x \to t, u \to \sqrt{t}$, $x \to a, u \to \sqrt{a}$, tenemos:

$$\lim_{t\to 0^+}\int_{\sqrt{t}}^{\sqrt{a}} \frac{2u}{u\,(1+u^2)}\,du = \lim_{t\to 0^+} 2\int_{\sqrt{t}}^{\sqrt{a}} \frac{1}{1+u^2}\,du = 2\cdot \lim_{t\to 0^+}\left[\arctan(u)\right]_{\sqrt{t}}^{\sqrt{a}}$$

$$2\cdot \lim_{t\to 0^+}\arctan(\sqrt{a}) - \arctan(\sqrt{t}) = 2\cdot\arctan(\sqrt{a}) - 2\cdot\lim_{t\to 0^+}\arctan(\sqrt{t})$$

$$= 2\cdot\arctan(\sqrt{a}) - 2\cdot\arctan(0) = 2\arctan(\sqrt{a}).$$

Ahora, para la segunda integral, tenemos:

$$\int_a^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx = \lim_{b\to\infty} 2\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \frac{1}{1+u^2}\,du$$

$$2\cdot\lim_{b\to\infty}\left[\arctan(u)\right]_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} = 2\cdot\lim_{b\to\infty}\arctan(\sqrt{b}) - \arctan(\sqrt{a}) = 2\cdot\left[\frac{\pi}{2} - \arctan(\sqrt{a})\right] = \pi - 2\arctan(\sqrt{a}).$$

Por tanto, el valor de la integral es:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx = 2\arctan(\sqrt{a}) + \pi - 2\arctan(\sqrt{a}) = \pi.$$

Problema 2

Demuestre que si $a > -1$ y $b > a + 1$, entonces la siguiente integral converge:

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{1+x^b}\, dx$$

Respuesta

Primero, podemos notar que la función $f(x) = \frac{x^a}{1+x^b}$ es positiva en el intervalo $(0, \infty)$. Separando la integral, se tiene:

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{1+x^b}\, dx = \int_0^1 \frac{x^a}{1+x^b}\, dx + \int_1^\infty \frac{x^a}{1+x^b}\, dx$$

Podemos notar que la función no tendrá problemas cuando $x \to 0^+$ debido al $+1$ en el denominador (**se puede agregar rigurosidad**), y por tanto por ese lado converge. Para analizar convergencia cuando $x \to \infty$ (la integral de la derecha), podemos definir c tal que $c = b - a > 1$, y donde también $a + c > 0$. Entonces, podemos realizar una comparación con el límite con la función $g(x) = x^{-c}$, tal que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^a}{1+x^b} \div \frac{1}{x^c} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^c}{\frac{1}{x^a} + x^{b-a}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^c}{\frac{1}{x^a} + x^c} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^{a+c}} + 1} = \frac{1}{0+1} = 1.$$

Por lo tanto, las integrales en el intervalo $(1, \infty)$ tienen el mismo comportamiento. Podemos ahora analizar la siguiente integral:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^c}\, dx.$$

Por criterio de integrales tipo p, la condición de convergencia es justamente $c > 1$, lo cual se cumple. Esto significa que la integral anterior converge y, consecuentemente, la integral de $f(x)$ en ese intervalo también converge. Al tener que ambas integrales convergen, la integral original en el intervalo completo también converge.

Problema 3

Estudie la convergencia de las siguientes integrales:

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sec^2(x)}{x\sqrt{x}} dx$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sin(x)}$
3. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}+2}{x+6} dx$

Respuesta

1. Sabemos que la función $\cos(x)$ es decreciente en el intervalo $[0, \pi]$, por lo que se tiene lo siguiente:

$$0 \le x \le 1 < \frac{\pi}{3} \Longrightarrow \frac{1}{2} < \cos(1) \le \cos(x) \le 1 \Longrightarrow 1 \le \sec(x) < 2 \Longrightarrow 1 \le \sec^2(x) < 4$$

Por lo tanto, en nuestro intervalo, donde $x\sqrt{x} > 0$, se tiene:

$$\frac{4}{x\sqrt{x}} > \frac{\sec^2(x)}{x\sqrt{x}} \geq \frac{1}{x\sqrt{x}} \Longrightarrow \int_0^1 \frac{4}{x\sqrt{x}}dx > \int_0^1 \frac{\sec^2(x)}{x\sqrt{x}}dx \geq \int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x}}dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{3/2}}dx$$

Nos vamos a olvidar de la parte izquierda. Notemos que la parte derecha, es una integral del tipo p con $p > 1$. Como el límite inferior de la integral es 0, esta diverge, y, por lo tanto, nuestra integral (que era mayor o igual) también diverge.

2. Para $x \geq 0$ se tiene que $\sin(x) \leq x$, entonces:

$$\sin(x) \leq x \Longrightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\sin(x)}$$

Integrando a ambos lados desde 0 a 1 se tiene que:

$$\int_0^1 \frac{1}{x}dx \leq \int_0^1 \frac{1}{\sin(x)}dx$$

Se puede determinar el comportamiento de la integral de la izquierda:

$$\int_0^1 \frac{1}{x}dx = \ln(1) - \lim_{x\to 0} \ln(x) = \infty$$

Por lo tanto, por comparación, vemos que $\int_0^1 \frac{1}{\sin(x)}dx$ no converge.

3. Notemos que cuando $x \to \infty$ tendremos que:

$$\frac{\sqrt{x}+2}{x+6} \approx \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{1/2}}$$

Lo que sugiere hacer una comparación en el límite con la función $f(x) = \dfrac{1}{x^{1/2}}$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{x}+2}{x+6}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{u\to\infty} \frac{u^2+2u}{u^2+6} = \lim_{u\to\infty} \frac{1+\frac{2}{u}}{1+\frac{6}{u^2}} = 1$$

Dado que el límite es 1, la convergencia de la integral que nos interesa depende del comportamiento de $\int_0^\infty \frac{1}{x^{1/2}}dx$. Esta integral diverge:

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^{1/2}}dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}}dx + \int_1^\infty \frac{1}{x^{1/2}}dx$$

La integral de la izquierda converge pero la de la derecha no (integrales tipo p con $p \leq 1$), por lo que la suma de ambas tampoco converge. Concluimos entonces que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}+2}{x+6}dx$ diverge.

Problema 4**

Sea $\alpha > 0$. Muestre que la siguiente integral impropia no converge:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha x}{\pi(\alpha^2 + x^2)}\, dx.$$

Más aún, muestre que si f y g son funciones crecientes, que no se anula, y tal que $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty} g(t) = \infty$, entonces el límite

$$\lim_{t\to\infty} \int_{-g(t)}^{f(t)} \frac{\alpha x}{\pi(\alpha^2 + x^2)}\, dx,$$

de existir, puede ser cualquier número real, -∞, o ∞, dependiendo de f y g. ¿En qué caso es 0?

Respuesta

Se puede ver que la integral no converge ocupando comparación al límite. Primero, sacando las constantes y separando intervalos, se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha x}{\pi(\alpha^2 + x^2)}\, dx = \frac{\alpha}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{1} \frac{x}{\alpha^2 + x^2}\, dx + \int_{1}^{\infty} \frac{x}{\alpha^2 + x^2}\, dx\right]$$

Podemos definir nuestra función $f(x) = x/(\alpha^2 + x^2)$, y una segunda función $g(x) = 1/x$. Comparando para la integral de la derecha, se tiene:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\alpha^2 + x^2} \div \frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{\alpha^2}{x^2} + 1} = \frac{1}{0+1} = 1,$$

por lo que tienen el mismo comportamiento al infinito. Como $g(x) = 1/x$ diverge, entonces la integral también diverge y por lo tanto en el intervalo completo debe diverger.

Para nuestro segundo caso, se tiene que:

$$\int_{-g(t)}^{f(t)} \frac{\alpha x}{\pi(\alpha^2 + x^2)}\, dx = \frac{\alpha}{2\pi} \int_{-g(t)}^{f(t)} \frac{d(\alpha^2 + x^2)}{(\alpha^2 + x^2)} = \frac{\alpha}{2\pi}\left[\ln(\alpha^2 + x^2)\right]_{-g(t)}^{f(t)} = \frac{\alpha}{2\pi} \ln\left(\frac{\alpha^2 + f^2(t)}{\alpha^2 + g^2(t)}\right).$$

Si podemos definir c tal que $f(t) = c \cdot g(t)$, $I(t) = \frac{\alpha}{2\pi} \ln\left(\frac{\alpha^2 + c^2 g^2(t)}{\alpha^2 + g^2(t)}\right)$, entonces se tiene que:

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{\alpha}{2\pi} \ln\left(\frac{\alpha^2 + c^2 g^2(t)}{\alpha^2 + g^2(t)}\right) = \lim_{t\to\infty} \frac{\alpha}{2\pi} \ln\left(\frac{\frac{\alpha^2}{g^2(t)} + c^2}{\frac{\alpha^2}{g^2(t)} + 1}\right) = \frac{\alpha}{2\pi} \ln\left(c^2\right) = \frac{\alpha}{\pi} \ln(c).$$

Luego, para cualquier $u \in \mathbb{R}$, donde elegimos $c = e^{\frac{\pi}{\alpha} u}$, entonces:

$$\lim_{t\to\infty} \int_{-g(t)}^{f(t)} \frac{\alpha x}{\pi(\alpha^2 + x^2)}\, dx = \frac{\alpha}{\pi} \ln(e^{\frac{\pi}{\alpha} u}) = u,$$

por lo que el límite puede ser cualquier número real, dependiendo de f y g. Más aún, si $\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = \infty$, entonces:

$$\lim_{t\to\infty} \int_{-g(t)}^{f(t)} \frac{\alpha x}{\pi(\alpha^2 + x^2)}\, dx = \lim_{t\to\infty} \frac{\alpha}{2\pi} \ln\left(\frac{\alpha^2 + f^2(t)}{\alpha^2 + g^2(t)}\right) = \lim_{t\to\infty} \frac{\alpha}{\pi} \ln\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right) = \infty.$$

y si $\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 0$, entonces:

$$\lim_{t\to\infty} \int_{-g(t)}^{f(t)} \frac{\alpha x}{\pi(\alpha^2 + x^2)}\, dx = \lim_{t\to\infty} \frac{\alpha}{\pi} \ln\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right) = -\infty.$$

Si es que $f(t) = g(t)$ en el límite ($\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$), y reconociendo que el interior es una función impar, entonces la integral es la da una función impar en un intervalo simétrico:

$$\int_{-g(t)}^{f(t)} \frac{\alpha x}{\pi(\alpha^2 + x^2)}\, dx = 0$$

Finalmente, al reconocer el patrón, nos importa más que todo el *qué tan rápido crecen una función con respecto a la otra*. Si g mucho más lento, algo más lento, de igual manera, algo más rápido, o mucho más rápido en comparación con f, entonces el límite será -∞, $u \in (-\infty, 0)$, 0, $u \in (0, \infty)$,∞, respectivamente. Incluso, podría pasar que el límite directamente no exista. Podemos observar esto de manera más clara en la forma de límites:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \tfrac{f(t)}{g(t)} = 0 &\implies \lim_{t\to\infty} I(t) = -\infty,\\
\lim_{t\to\infty} \tfrac{f(t)}{g(t)} = c \in (0,1) &\implies \lim_{t\to\infty} I(t) = u \in (-\infty, 0),\\
\lim_{t\to\infty} \tfrac{f(t)}{g(t)} = 1 &\implies \lim_{t\to\infty} I(t) = 0,\\
\lim_{t\to\infty} \tfrac{f(t)}{g(t)} = c \in (1,\infty) &\implies \lim_{t\to\infty} I(t) = u \in (0, \infty),\\
\lim_{t\to\infty} \tfrac{f(t)}{g(t)} = \infty &\implies \lim_{t\to\infty} I(t) = \infty.\\
\lim_{t\to\infty} \tfrac{f(t)}{g(t)} = \text{no existe} &\implies \lim_{t\to\infty} I(t) = \text{no existe}.
\end{aligned}$$

Problema 5

Considere la función $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. Muestre que

$$\int_0^\infty f(x)dx$$

es convergente.

Hint: *Integre por partes, utilizando* $1 - \cos x$ *como antiderivada para* $\sin x$.

Respuesta

Utilizando integración por partes tenemos:

$$\begin{aligned}
u &= \frac{1}{x} & dv &= \sin x\, dx\\
du &= -\frac{1}{x^2}\, dx & v &= 1 - \cos x
\end{aligned}$$

Luego:

$$= \lim_{t\to\infty} \left[\frac{1-\cos x}{x}\right]_0^t + \int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx$$

Veamos en primer lugar la convergencia de la integral. Notemos que, $\forall x \in \mathbb{R}$, tenemos:

$$\begin{aligned} & -1 \leq \cos(x) \leq 1 \\ \iff \quad & -1 \leq -\cos(x) \leq 1 \\ \iff \quad & 0 \leq 1 - \cos(x) \leq 2 \\ \implies \quad & \int_1^\infty \frac{1-\cos(x)}{x^2}\,dx \leq \int_1^\infty \frac{2}{x^2}\,dx \end{aligned}$$

Como $\displaystyle\int_1^\infty \frac{2}{x^2}\,dx$ converge, entonces $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1-\cos(x)}{x^2}\,dx$ converge por la prueba de comparación. Por otro lado, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-\cos(x)}{x^2}\,dx$ converge pues $\displaystyle\frac{1-\cos(x)}{x^2}$ es continua y acotada en $(0,1]$, y $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$, luego la integral no es impropia y, por tanto, converge. Se sigue que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos(x)}{x^2}\,dx$ converge.

Para analizar la convergencia del límite restante, la evaluación en $x = 0$ se debe analizar con límite pues la función no está definida en ese punto:
Para analizar la convergencia del límite restante, la evaluación en $x = 0$ se debe analizar con límite pues la función no está definida en ese punto:

$$\lim_{t\to\infty} \left[\frac{1-\cos x}{x}\right]_0^t = \lim_{t\to\infty} \frac{1-\cos t}{t} - \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x}{x}$$

El primer límite es 0 por teorema del sándwich, y el segundo también es 0 utilizando límites trigonométricos.
Finalmente se concluye que la integral inicial es convergente.

1 Problemas Propuestos

Problema Propuesto 1

Encuentre el valor de la constante C para la cual la integral converge. Evalúe la integral para el valor de C.

$$\int_0^\infty \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{C}{3x+1}\right)$$

Respuesta

Para esta integral, notamos que al infinito se comporta como:

$$\frac{x}{x^2+1} \underset{x\to\infty}{\approx} \frac{1}{x} \quad \text{y} \quad \frac{C}{3x+1} \underset{x\to\infty}{\approx} \frac{C}{3x}$$

Por tanto, la función al infinito se comporta como:

$$\frac{1}{x} - \frac{C}{3x} = \frac{3-C}{3x}$$

Notemos que, si $C \neq 3$, entonces se comporta como $\frac{1}{x}$, lo cual no es integrable. Por tanto, es condición de convergencia que $C = 3$, pero todavía no sabemos si efectivamente converge. Analizamos entonces la situación donde $C = 3$, cuya integral es:

$$\int_0^\infty \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{3}{3x+1} \right),$$

lo cual podemos desarrollar directamente con uso de logaritmos:

$$\int_0^\infty \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{3}{3x+1} \right) = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \ln(3x+1) \right]_0^\infty = \left[\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{3x+1} \right) \right]_0^\infty$$

$$= \ln\left(\frac{1}{3}\right) - 0 = \ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\ln(3)$$

Problema Propuesto 2

Estudie la convergencia de las siguientes integrales:

1. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan(x)}{2+e^x} dx$
2. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{x^3+1} dx$
3. $\displaystyle\int_0^\infty \sin(x^2) dx$

   Hint: *Recuerde la resolución del problema 4.*

Respuesta

1. Podemos acotar $\arctan(x)$, ya que en el intervalo $(0, \infty)$, se tiene:

   $$0 \leq \arctan(x) \leq \frac{\pi}{2} \Longrightarrow 0 \leq \frac{\arctan(x)}{2+e^x} \leq \frac{\pi}{4+2e^x}$$

   Ahora, considerando que ya estará acotado por la izquierda por 0, sólo nos preocupamos por la derecha:

   $$\int_0^\infty \frac{\arctan(x)}{2+e^x}\ dx \leq \int_0^\infty \frac{\pi}{4+2e^x}\ dx$$

   La integral de la derecha converge. Para obtener el valor, podemos hacer lo siguiente:

   $$\int_0^\infty \frac{\pi}{4+2e^x}\ dx = \frac{\pi}{2}\int_1^\infty \frac{1}{u(2+u)}\ dx = \frac{\pi}{4}\int_1^\infty \frac{1}{u} - \frac{1}{u+2}\ dx$$

   $$\frac{\pi}{4}\left[\ln(u) - \ln(u+2)\right]_1^\infty = \frac{\pi}{4}\left[\ln\left(\frac{u}{u+2}\right)\right]_1^\infty = \frac{\pi}{4}\ln 3$$

2. Para esta integral, primero tenemos que fijarnos que ese $+1$ en el denominador significa que no tenemos problemas con 0 y sólo con ∞. Por tanto, primero separar la integral en dos:

$$\int_0^\infty \frac{x}{x^3+1}dx = \int_0^1 \frac{x}{x^3+1}dx + \int_1^\infty \frac{x}{x^3+1}dx$$

La primera integral no tiene problemas, pero ahora debemos analizar la segunda. Podemos hacer la siguiente comparación en el dominio $(1,\infty)$

$$x^3+1 \geq x^3 \Longrightarrow \frac{1}{x^3+1} \leq \frac{1}{x^3} \Longrightarrow \frac{x}{x^3+1} \leq \frac{x}{x^3}.$$

Ahora, podemos integrar en ambos lados, donde se mantiene la desigualdad:

$$\int_1^\infty \frac{x}{x^3+1}dx \leq \int_1^\infty \frac{x}{x^3}dx.$$

Al tener que la integral de la derecha converge (test $p > 1$), la integral original también converge.

3. Considere la sustitución $u = x^2 \Longleftrightarrow \sqrt{u} = x$, luego $dx = \dfrac{du}{2\sqrt{u}}$. Los límites de integración quedan igual, por lo que tenemos:

$$\int_0^\infty \sin(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\,du$$

Integrando por partes, de manera similar al ejercicio 4, tenemos:

$$r = \frac{1}{\sqrt{u}} \qquad ds = \sin u\,dx$$
$$dr = -\frac{1}{2u^{\frac{3}{2}}}\,dx \qquad s = 1-\cos u$$

Luego, reemplazando:

$$= \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\frac{1-\cos t}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2}\lim_{u\to 0^+}\frac{1-\cos u}{\sqrt{u}} + \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{1-\cos u}{u^{\frac{3}{2}}}\,du$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{1-\cos u}{u^{\frac{3}{2}}}\,du$$

Los límites son 0 por la misma idea del ejercicio 4. Por un argumento similar, la integral que queda es convergente.

Problema Propuesto 3

Evalúe la integral

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$$

para $n = 1, 2$, y 3. Conjeture el valor de la integral cuando n es un entero positivo arbitrario.
Propuesto: Demuestre su conjetura ocupando inducción.

Respuesta

Para el caso $n = 1$, ocupamos integración por partes, tal que:

$$\int_0^\infty xe^{-x}\,dx = \left[xe^{-x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 0 + \left[-e^{-x}\right]_0^\infty = 1.$$

Para el caso $n = 2$, ocupamos nuevamente integración por partes, pero primero nos fijaremos en la integral que aparece:

$$\int_0^\infty x^2e^{-x}\,dx = \left[-x^2e^{-x}\right]_0^\infty - \int_0^\infty -2xe^{-x}\,dx = \left[-x^2e^{-x}\right]_0^\infty + 2\int_0^\infty xe^{-x}\,dx.$$

La parte de la izquierda la podemos evaluar y nos queda como $0 - 0 = 0$. La parte de la derecha es simplemente 2 veces la integral para $n = 1$, y por tanto:

$$0 + 2\int_0^\infty xe^{-x}\,dx = 2 \cdot 1 = 2$$

Finalmente, para el caso de $n = 3$, hacemos lo mismo y nos queda:

$$\int_0^\infty x^3e^{-x}\,dx = \left[-x^3e^{-x}\right]_0^\infty - \int_0^\infty -3x^2e^{-x}\,dx = \left[-x^3e^{-x}\right]_0^\infty + 3\int_0^\infty x^2e^{-x}\,dx$$

Nuevamente, la parte de la izquierda la podemos evaluar y nos queda como $0 - 0 = 0$. Y, de manera similar al caso anterior, la parte de la derecha es simplemente 3 veces la integral para $n = 2$, y por tanto:

$$0 + 3\int_0^\infty x^2e^{-x}\,dx = 3 \cdot 2 = 6$$

Por lo tanto, podemos conjeturar que la integral para n entero positivo arbitrario nos entrega $n!$.

Para demostrar por inducción, podemos demostrar para el caso base $n = 1$, y luego asumir que la conjetura es cierta para $n = k$, y demostrar para $n = k + 1$. Para $n = 1$, ya demostramos que la integral es 1. Ahora, nuestra hipótesis de inducción es que la integral para $n = k$ es $k!$. Para demostrar para $n = k + 1$, ocupamos integración por partes, tal que:

$$\int_0^\infty x^{k+1}e^{-x}\,dx = \left[-x^{k+1}e^{-x}\right]_0^\infty - \int_0^\infty -(k+1)x^ke^{-x}\,dx = \left[-x^{k+1}e^{-x}\right]_0^\infty + (k+1)\int_0^\infty x^ke^{-x}\,dx.$$

La parte de la izquierda la podemos evaluar y nos queda como $0 - 0 = 0$. La parte de la derecha es simplemente $(k + 1)$ veces la integral para $n = k$, y por tanto:

$$0 + (k+1)\int_0^\infty x^ke^{-x}\,dx = (k+1) \cdot k! = (k+1)!$$

demostrando así la conjetura por inducción.