Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
MAT1620 – Cálculo II
Segundo Semestre 2025

Ayudantía 8

Derivadas Parciales. Diferenciabilidad y Planos Tangentes

Problema 1

Sea

$$f(x,y) = x^2 y\, e^{xy} + \sin(xy)$$

a) Calcule las derivadas parciales de primer orden $f_x(x,y)$ y $f_y(x,y)$.

b) Calcule las segundas derivadas mixtas $f_{xy}(x,y)$ y $f_{yx}(x,y)$.

c) Verifique si se cumple el teorema de Clairaut.

Problema 2

Considere la función $f(x,y) = y\cos(x-y)$.

a) Muestre que f es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$.

b) Determine una ecuación para el plano tangente al gráfico de f en el punto $\big(2,2,f(2,2)\big)$.

c) Aproxime, utilizando la linealización de f, el valor de $1.98\cos(0.03)$.

Problema 3

Considere la función

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Muestre que f es diferenciable en $(0,0)$, pero que sus derivadas parciales no son continuas en $(0,0)$. ¿Contradice esto el teorema visto en clases?

Problema 4 ($\star$)

Considere la gráfica de la función diferenciable $z = f(y)$, dibujada en el primer cuadrante del plano yz. Sea $z = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ la superficie de revolución que se obtiene al girar $z = f(y)$ alrededor del eje z. Observe que los puntos $P_1\big(0, y_1, f(y_1)\big)$, $P_2\big(0, -y_1, f(y_1)\big)$, $P_3\big(y_1, 0, f(y_1)\big)$, y $P_4\big(-y_1, 0, f(y_1)\big)$ son puntos de la superficie de revolución mencionada (no necesita demostrarlo). Obtenga las ecuaciones de los planos tangentes y de las rectas normales a la superficie en cada uno de estos puntos. Pruebe que los cuatro planos se cortan en un mismo punto en el eje z, y que esto mismo ocurre con las rectas normales.

Problema 5 (Propuestos)

a) Una clase importante de ecuación diferencial es la ecuación del calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Demuestre que

$$u(x,t) = \frac{1}{t^{1/2}} e^{-x^2/4t}$$

es una solución a la ecuación.

b) Determine la ecuación del plano tangente a la superficie $z = 3x^2 - 8xy + 5y^2$ en el punto en que la recta normal tiene por vector director a $\vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

c) Sea $f(x,y) = -\sqrt{1-x^2-y^2}$, para (x,y) tales que $x^2+y^2 < 1$. Muestre que el plano tangente a la gráfica de f en el punto $\big(x_0, y_0, f(x_0,y_0)\big)$ es ortogonal al vector $\vec{u} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0,y_0) \end{bmatrix}$. Interprete geométricamente el resultado.