**Problema 1**

Considere los vectores $u = (1, 2, -3)$ y $v = (2, 0, -1)$.

*a*) Determine $u + 3v$.
*b*) Determine $u \cdot v$.
*c*) Determine un vector con la misma dirección de $u$ pero con norma 3.
*d*) Determine el ángulo entre $u$ y $v$
*e*) Determine $u \times v$

a) $u + 3v = (1,2,-3) + 3(2,0,-1) = (1,2,-3) + (6,0,-3) = (7,2,-6)$

b) $u \cdot v = (1,2,-3) \cdot (2,0,-1) = 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + (-3)(-1) = 5$

c) $u = (1,2,-3) \Rightarrow \|u\|_2 = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$

$$\left\| \frac{u}{\|u\|_2} \right\|_2 = 1 \Rightarrow \left\| \underbrace{\frac{3u}{\|u\|_2}}_{\star} \right\|_2 = 3$$

$\star = \frac{3}{\sqrt{14}}(1,2,-3) = \frac{3}{\sqrt{14}} u$ tiene norma 3

d) Sabemos que $u \cdot v = \|u\|_2 \|v\|_2 \cos(\alpha)$ siendo $\alpha$ el ángulo entre $u$ y $v$.

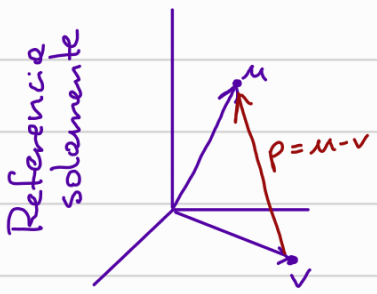
Calculamos $u \cdot v$ y $\|u\|_2$ arriba. $\|v\|_2 = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$

$$\Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{u \cdot v}{\|u\|_2 \|v\|_2} = \frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{14}} = \frac{5}{\sqrt{70}} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{5}{\sqrt{70}}\right)$$

e) $$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (2 \cdot (-1) - (-3) \cdot 0)\,\hat{\imath} - (1(-1) - (-3) \cdot 2)\,\hat{\jmath} + (1 \cdot 0 - 2 \cdot 2)\,\hat{k}$$
$$= -2\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} - 4\hat{k} = -2\hat{x} - 5\hat{y} - 4\hat{z}$$

## Problema 2

Determine las ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta que pasa por los puntos $(4,3,-1)$ y $(1,2,3)$.




Buscamos la recta que contenga a p.

$$p = (4,3,-1) - (1,2,3) = (3,1,-4)$$

La ecuación vectorial resulte:

$$v(t) = (1,2,3) + t(3,1,-4)$$

Ecuación paramétrica: (directo de ec. vectorial)

$$x = 1 + 3t$$
$$y = 2 + t$$
$$z = 3 - 4t$$

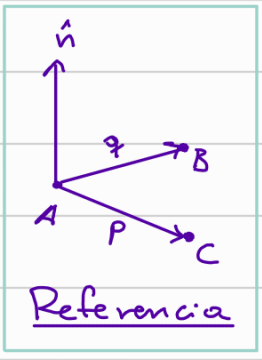
Ecuación simétrica (despejando el parámetro de la ec. paramétrica):

$$x = 1 + 3t \Rightarrow t = \frac{x-1}{3}$$
$$y = 2 + t \Rightarrow t = y - 2$$
$$z = 3 - 4t \Rightarrow t = \frac{3-z}{4}$$

$$\therefore \frac{x-1}{3} = y - 2 = \frac{3-z}{4}$$ es ecuación simétrica.

## Problema 3

Determine una ecuación del plano que pasa por los puntos $(1,1,1)$, $(1,0,-1)$ y $(1,3,-2)$.




Calculemos un vector normal al plano:

$$p = C - A = (1,3,-2) - (1,1,1) = (0,2,-3)$$
$$q = B - A = (1,0,-1) - (1,1,1) = (0,-1,-2)$$

$$\hat{n} = p \times q = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 2(-2) - (-3)(-1) = -8\hat{i} \Rightarrow \hat{n} = (-8,0,0)$$
$$\hat{n} = (1,0,0)$$

Creamos un vector arbitrario a partir de A (A está en el plano)

$$D = (x,y,z) - \underbrace{(1,1,1)}_{A} = (x-1, y-1, z-1)$$

Y sabemos que $V \cdot \hat{n} = 0$ para todo vector V en el plano.

Hacemos $D \cdot \hat{n} = 0$ (forzamos que D esté en el plano)

$D \cdot \hat{n} = (x-1, y-1, z-1) \cdot (1, 0, 0) = x - 1 = 0$

Tenemos que los 3 puntos están contenidos en el plano $x = 1$

EXTRA:

El plano también está determinado por el punto inicial (A en este caso) y los 2 vectores generados: (P y q)

$r(s,t) = (1,1,1) + t(0,2,-3) + s(0,-1,-2)$ ec. vectorial

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 + 2t - s \\ z = 1 - 3t - 2s \end{array}\right\} \text{ec. paramétrica}$$

**Problema 4**

Determine la ecuación del plano que contiene a la recta de ecuación simétrica $x = 2y = 3z$ y que pasa por el punto $(1, -1, 1)$.

Tenemos $t = x = 2y = 3z \Rightarrow x = t, \; y = \frac{t}{2}, \; z = \frac{t}{3}$

La recta paramétrica resulta: $r(t) = (t, t/2, t/3)$

$r(t) = t(1, 1/2, 1/3)$

Vemos $r(0) = (0,0,0)$ y $r(6) = (6,3,2)$, así, obtenemos 3 puntos que deben estar en el plano y replicamos procedimiento de la pregunta anterior (tomamos $A = r(0) = \vec{0}$)

$$\hat{n} = ((6,3,2) - \vec{0}) \times ((1,-1,1) - \vec{0}) = (6,3,2) \times (1,-1,1) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 6 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 5\hat{i} - 4\hat{j} - 9\hat{k}$$

Tomamos $(x,y,z) - (0,0,0) = (x,y,z) = V$ vector arbitrario

Finalmente $V \cdot \hat{n} = (x, y, z) \cdot (5, -4, -9) = 0$

$\Rightarrow 5x - 4y - 9z = 0$ es la ecuación del plano solicitado.

**Problema 5**

Determine la ecuación simétrica de la recta de intersección de los planos

$$5x - 2y - 2z = 1, \quad 4x + y + z = 6$$

$\longrightarrow$ $5x - 2y - 2z = 1$ (1)

$4x + y + z = 6$ (2)

(1) $\Rightarrow$ $5x - 2(y + z) = 1$

De (2): $y + z = 6 - 4x$ (3)

Usando (3) en (1): $5x - 2(6 - 4x) = 1$

$5x - 12 + 8x = 1 \Rightarrow 13x = 13 \Rightarrow x = 1$ (4)

Usando (4) en (2): $4 + y + z = 6 \Rightarrow y + z = 2 \Rightarrow y = 2 - z$ (5)

$\therefore$ La ec. simétrica de la recta es $y = 2 - z$