Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
MAT1620 - Cálculo II - Sección 2 - 2014-02
Profesor: José López

Ayudantía Extra para I1

Ayudante: Daniel Araya - dtaraya@uc.cl

Problemas

Problema 1

Determine el área de la región encerrada por las gráficas de las curvas:

a) $y = |\sin(x)|$ y $y = \cos(x)$ con $x \in [-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}]$.

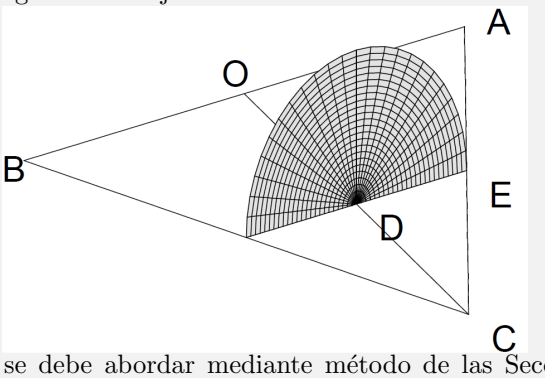
b) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}, y = x$ y $x = 2$

Solución: Trivial, las soluciones son:
a) $2(\sqrt{2} - 1)$.
b) $\dfrac{3}{2} - 2(\sqrt{2} - 1)$

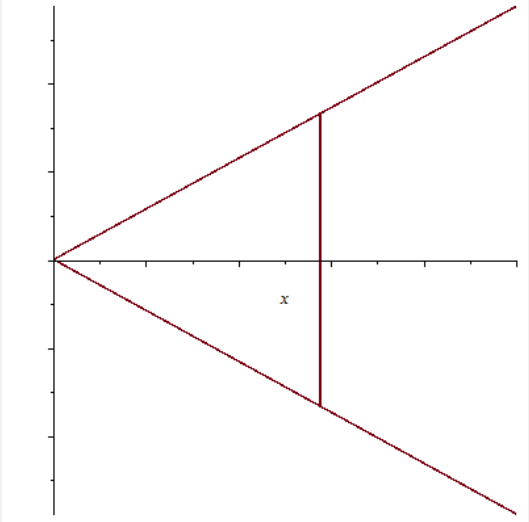
Problema 2 (Solución alternativa al Control 2003-02)

La base de un sólido es un triángulo equilátero de lado a y sus secciones perpendiculares a la base son semicírculos con diámetros perpendiculares a una altura fija del triángulo. Hallar el volumen del sólido.

Solución: Visualicemos la figura a trabajar



Claramente este problema se debe abordar mediante método de las Secciones Transversales. Una alternativa de solución es considerar el eje x en la altura/eje de simetria OC del triángulo equilátero, de ahí bastaría determinar el radio (y con ello el área) de cada sección transversal para cada x.



Por geometría sabemos que para una altura particular x es proporcional al lado l del triangulo en $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$x = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$
$$\Leftrightarrow l = \frac{2x\sqrt{3}}{3}$$
$$\Rightarrow r\big|_x = \frac{l}{2} = \frac{x\sqrt{3}}{3}$$

Como $A(r) = \frac{\pi}{2} \cdot r^2$:

$$\Rightarrow A(x) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{3x^2}{9}$$
$$A(x) = \frac{\pi x^2}{6}$$

Así finalmente el volumen formado por la figura es:

$$\begin{aligned} V &= \int_{x \in Dom\, A(x)} A(x)\, dx \\ &= \int_0^{\frac{a\sqrt{3}}{2}} \frac{\pi x^2}{6}\, dx \\ &= \frac{\pi}{6}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{\frac{a\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{\pi}{6} \cdot \left(\frac{a^3 \cdot \sqrt{3}}{8}\right) \\ &= \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{48} \end{aligned}$$

Concluyendo lo pedido. ■

Problema 3

El arco de $f(x) = \sin(x)$, desde $x = 0$ hasta $x = 2\pi$ gira al rededor del eje x. Hallar la superficie del manto generado.

Solución: Sabemos que:

$$S = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi |f(x)| \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx$$

Como $f'(x) = \cos(x)$

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^{2\pi} 2\pi |\sin(x)| \sqrt{1+\cos^2(x)}\, dx \\
&= \int_0^{\pi} 2\pi \sin(x) \sqrt{1+\cos^2(x)}\, dx - \int_{\pi}^{2\pi} 2\pi \sin(x) \sqrt{1+\cos^2(x)}\, dx \quad u = \cos(x) \to du = -\sin(x)\, dx \\
&= 2\pi \left(- \int_1^{-1} \sqrt{1+u^2}\, dx + \int_{-1}^{1} \sqrt{1+u^2}\, dx \right) \\
&= 4\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1+u^2}\, d) \qquad\qquad u = \tan(x) \to du = \sec^2(x)\, dx \\
&= 4\pi \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sec^3(x)\, dx
\end{aligned}$$

Recordar que:

$$\begin{aligned}
I &= \int \sec^3(x)\, dx \\
&= \int \sec(x)\sec^2(x)\, dx \\
&u = \sec(x) \to du = \sec(x)\tan(x) \\
&dv = \sec^2(x) \to v = \tan(x) \\
\Rightarrow I &= \sec(x)\tan(x) - \int \sec(x)\tan^2(x)\, dx \\
I &= \sec(x)\tan(x) - \int \sec(x)(\sec^2(x) - 1)(x)\, dx \\
I &= \sec(x)\tan(x) - \int \sec^3(x)\, dx + \int \sec(x)\, dx \\
I &= \sec(x)\tan(x) - I + \int \sec(x)\, dx \\
I &= \frac{\sec(x)\tan(x) + \ln|\sec(x) + \tan(x)|}{2} + C
\end{aligned}$$

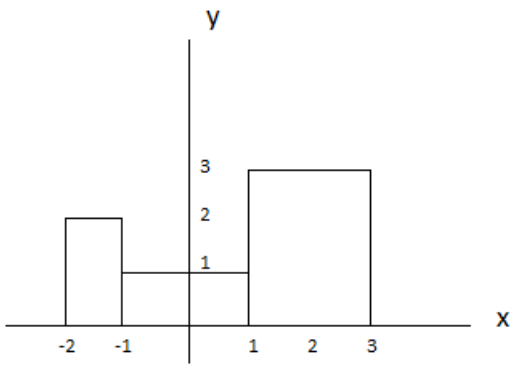
Finalmente entonces:

$$\begin{aligned}
S &= 4\pi \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sec^3(x)\,dx \\
&= 4\pi \cdot \frac{\sec(x)\tan(x) + \ln|\sec(x)+\tan(x)|}{2}\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} \\
&= 2\pi\left[\left(\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)\right) - \left(-\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}-1)\right)\right] \\
&= 2\pi(2\sqrt{2}+\ln(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1})) \\
&= 2\pi(2\sqrt{2}+\ln((\sqrt{2}+1)^2) \\
&= 2\pi(2\sqrt{2}+2\ln(\sqrt{2}+1)) \\
&= 4\pi(\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1))
\end{aligned}$$

Concluyendo lo pedido. ■

Problema 4

Determine el centroide de la región definida en el gráfico:



Solución:
La idea de este problema es aplicar la Propiedad Aditiva/Sustractiva de los Momentos: Sean las regiones $R_1, R_2, R_3, ..., R_n$ que no comparte pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ en común, de áreas $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ respectivamente. Y sean sus respectivos centroides $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), ..., (x_n, y_n)$. Luego se cumple que el centroide de la región $R_T = \bigcup_{i=1}^{n} R_i$ es:

$$x^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot A_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i} \qquad y^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot A_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i}$$

Del problema vemos que la el problema planteado:
Para $R_1 : (x_1, y_1) = (2, 3/2)$ $\quad A_1 = 2 \cdot 3 = 6$
Para $R_2 : (x_2, y_2) = (0, 1/2)$ $\quad A_2 = 2 \cdot 1 = 2$
Para $R_3 : (x_3, y_3) = (-3/2, 1)$ $\quad A_3 = 1 \cdot 2 = 2$

Luego

$$x^* = \frac{x_1 \cdot A_1 + x_2 \cdot A_2 + x_3 \cdot A_3}{A_1 + A_2 + A_3} \qquad y^* = \frac{y_1 \cdot A_1 + y_2 \cdot A_2 + y_3 \cdot A_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$
$$x^* = \frac{2 \cdot 6 + 0 \cdot 2 - 3/2 \cdot 2}{6 + 2 + 2} \qquad y^* = \frac{3/2 \cdot 6 + 1/2 \cdot 2 + 1 \cdot 2}{6 + 2 + 2}$$
$$x^* = \frac{9}{10} \qquad y^* = \frac{6}{5}$$

Concluyendo lo pedido.

Problema 5

Calcule el centroide de la región $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ con:

$$\mathcal{R}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + \frac{y^2}{4} = 1, y \geq 0\}$$
$$\mathcal{R}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 0\}$$

Solución:
Debemos ocupar Propiedad Aditiva/Sustractiva de los Momentos, para esto calculemos los centroides de la regiones $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$:
Vemos que

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\pi ab}{2} \\ &= \pi \end{aligned}$$

Como la figura es simétrica $x_1 = 0$, luego

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (2\sqrt{1-x^2})^2\, dx}{A_1} \\ &= \frac{2\int_{-1}^{1} 1 - x^2\, dx}{\pi} \\ &= \frac{2\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1}}{\pi} \\ &= \frac{8}{3\pi} \end{aligned}$$

Luego trivialmente, como $\mathcal{R}_2$ es un cuadrado:

$$\begin{aligned} A_2 &= 4 \\ x_2 &= 0 \\ y_2 &= -1 \end{aligned}$$

Así finalmente

$$\begin{aligned} x^* &= 0 \\ y^* &= \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2}{A_1 + A_2} \\ &= \frac{\pi \cdot \frac{8}{3\pi} + 4 \cdot (-1)}{4+\pi} = \frac{\frac{8}{3} - 4}{4+\pi} \\ &= -\frac{4}{3(\pi+4)} \end{aligned}$$

Conjeturamos que el centroide de $\mathcal{R}$ es $(x^*, y^*) = \left(0, -\frac{4}{3(\pi+4)}\right)$
Concluyendo lo pedido. ■

¡PROPUESTO! (¡HAGANLO!)

En base a lo aprendido anteriormente, resuelva el Problema 2 de la I2 del TAV 2013

Hint: Use la Propiedad Aditiva/Sustractiva de los Momentos.
Hint 2: Calcule las integrales de $\sec^5(\theta)$ *y* $\sec^3(\theta)$.

Problema 6

Calcule el volumen generado al rotar la curva $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ entorno la curva $x+y=1$.

Solución:
Claramente debemos ocupar el Teorema de Pappus. Calculemos el área y centroide de la figura: Área:

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^1 (1-x)-(1-\sqrt{x})^2\,dx \\
&= \int_0^1 (-x+2\sqrt{x}-x)\,dx \\
&= \int_0^1 (2\sqrt{x}-2x)\,dx \\
&= \left(\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-x^2\right)\Big|_0^1 \\
A_1 &= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Centroide:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{\displaystyle\int_0^1 x\left((1-x)-(1-\sqrt{x})^2\right)\,dx}{A} \\
&= \frac{\displaystyle\int_0^1 2x\sqrt{x}-2x^2\,dx}{\frac{1}{3}} \\
&= 6\int_0^1 x\sqrt{x}-x^2\,dx \\
&= 6\left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 \\
&= 6\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{3}\right) \\
&= 6\cdot\frac{1}{15} \\
x &= \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{\frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^2 - (1-\sqrt{x})^4\,dx}{A} \\
&= \frac{3}{2}\int_0^1 \left((1-x)+(1-\sqrt{x})^2\right)\left((1-x)-(1-\sqrt{x})^2\right)\,dx \\
&= \frac{3}{2}\int_0^1 \left(2-2\sqrt{x}\right)\left(2\sqrt{x}-2x\right)\,dx \\
&= 6\int_0^1 \left(1-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}-x\right)\,dx \\
&= 6\int_0^1 \sqrt{x}-2x+x\sqrt{x}\,dx \\
&= 6\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-x^2+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right)\Bigg|_0^1 \\
&= 6\left(\frac{2}{3}-1+\frac{2}{5}\right) \\
&= \frac{6}{15}=\frac{2}{5}
\end{aligned}
$$

Nos faltaría conocer la distancia entre el punto $\left(\frac{2}{5},\frac{2}{5}\right)$ y la recta $x+y=1$. Recordemos que la distancia de un punto (x_0,y_0) con una recta $Ax+By+C=0$ es:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+x|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Así:

$$
\begin{aligned}
d &= \frac{1\cdot\frac{2}{5}+1\cdot\frac{2}{5}-1}{\sqrt{1+1}} \\
&= \frac{\frac{1}{5}}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{10}
\end{aligned}
$$

Finalmente por Teorema de Pappus:

$$
\begin{aligned}
V &= 2\pi d\cdot A \\
V &= 2\pi\frac{\sqrt{2}}{10}\cdot\frac{1}{3} \\
V &= \frac{\pi\sqrt{2}}{15}
\end{aligned}
$$

Concluyendo lo pedido. ■

Problema 7

La espiral de Cornu está definida como:

$$x(t) = \int_0^t \cos(\frac{\pi u^2}{2})\, du$$
$$y(t) = \int_0^t \sin(\frac{\pi u^2}{2})\, du$$

Encuentre su longitud de arco desde el instante $t = 0$ hasta el instante $t = t_0$.

Solución:
Sabemos que:

$$L = \int_{t_i}^{t_f} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

Es evidente que:

$$x'(t) = \cos(\frac{\pi t^2}{2}) \qquad y'(t) = \sin(\frac{\pi t^2}{2})$$
$$\Rightarrow x'(t)^2 = \cos^2(\frac{\pi t^2}{2}) \qquad y'(t)^2 = \sin^2(\frac{\pi t^2}{2})$$

Luego triavialmente $\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = 1$. Así:

$$\Rightarrow L = \int_0^{t_0} 1\, dt$$
$$L = t_0.\blacksquare$$

Problema 8

Calcule la superficie resultante de rotar el astroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ entorno al eje x.

Solución:
La clave radica en buscar una parametrización adecuada. En estos casos, hay que tratar de formar el 1 en la expresión, esto se da con la parametrización:
$x(t) = a\cos^3(t)$ e $y(t) = a\sin^3(t)$. Luego el recordemos que:

$$S = \int_{t_0}^{t_f} 2\pi |y(t)| \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Así:

$$\begin{aligned}
S &= 2\pi \int_0^{\pi} a|\sin|^3 t \sqrt{(-3a\cos^2 t \sin t)^2 + (3a\sin^2\cos t)^2}\, dt \\
&= 6\pi a^2 \int_0^{\pi} \sin^3 t \sqrt{\cos^2 t \sin^2 t}\, dt \\
&= 6\pi a^2 \int_0^{\pi} \sin^3 t |\cos t \sin t|\, dt \\
&= 6\pi a^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos t\, dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^4 t \cos t\, dt \right) \\
&= 6\pi a^2 \left(\sin^5 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin^5 t \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right) \\
&= \frac{12}{5}\pi a^2
\end{aligned}$$

Concluyendo lo pedido. ■

Problema 9

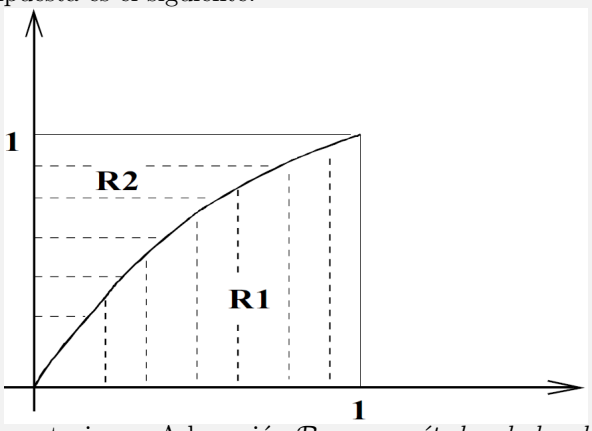
Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y sean:

$\mathcal{R}_1$ = la región del plano acotada por el eje x, la recta $x = 1$ y la curva $y = x^\alpha + x$.

$\mathcal{R}_2$ = la región del plano acotada por el eje y, la recta $y = 1$ y la curva $y = x^\alpha + x$.

Encontrar todo los valores de $\alpha > 0$ para los cuales los sólidos obtenidos de rotar las regiones $\mathcal{R}_1$ alrededor del eje x y $\mathcal{R}_2$ alrededor del eje y tengan el mismo volumen.

Solución:
El gráfico de la región expuesta es el siguiente:



Realicemos las respectivas rotaciones. A la región $\mathcal{R}_1$, por *métodos de los discos*:

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_0^1 y^2\,dx = \pi \int_0^1 (x^\alpha + x)^2\,dx \\ &= \pi \int_0^1 (x^{2\alpha} + 2x^{\alpha+1} + x^2)\,dx \\ &= \pi \left(\frac{1}{2\alpha+1} + \frac{2}{\alpha+2} + \frac{1}{3} \right) \Big|_0^1 \\ &= \pi \left(\frac{1}{2\alpha+1} + \frac{2}{\alpha+2} + \frac{1}{3} \right) \end{aligned}$$

A la región $\mathcal{R}_2$, por *métodos de los cascarones cilíndricos*:

$$\begin{aligned} V_2 &= \int_0^1 2\pi x h\,dx = 2\pi \int_0^1 x(2-y)\,dx \\ &= 2\pi \int_0^1 x(2 - x^\alpha - x)\,dx \\ &= 2\pi \int_0^1 (2x - x^{\alpha+1} - x^2)\,dx \\ &= 2\pi \left(\frac{2x^2}{2} - \frac{x^{\alpha+2}}{\alpha+2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 \\ &= 2\pi \left(1 - \frac{1}{\alpha+2} - \frac{1}{3} \right) \\ &= \pi \left(\frac{4}{3} - \frac{2}{\alpha+2} \right) \end{aligned}$$

Igualando $V_1 = V_2$:

$$1 = \frac{4}{3} - \frac{2}{\alpha+2} \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 1 \pm \sqrt{3}$$

Finalmente como $\alpha > 0 \Rightarrow \alpha = 1 + \sqrt{3}$. Concluyendo lo pedido. ■