Ayudantía 3

2. Determine todos los valores de $k > 0$ para los que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(kn)!}$$

es convergente.

Usamos el test de la razón

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{((n+1)!)^2}{(k(n+1))!} \cdot \frac{(kn)!}{(n!)^2} \right|$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)\cdot(n+1)\cdot \cancel{(kn)!}}{\cancel{(kn)!}\,(kn+1)\cdots(kn+k)} \right|$$

k términos

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^2}{(kn+1)\cdots(kn+k)} \right|$$

Ahora como $n \to \infty$, el denominador va a ser como $\approx (kn)^k$, esto es porque al lim al INFINITO prevalece el mayor grado.

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^2}{(kn+1)\cdots(kn+k)} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(kn)^k}$$

Si $k=1 \to \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n} = \infty$

$k=2 \to \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n)^2} = \frac{1}{4} < 1 \to$ Converge

$k>2 \to \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(3n)^3} = 0 < 1 \to$ Converge

Entonces la serie converge para

$$k \geq 2, \quad k \in \mathbb{Z}$$

3. Determine el radio e intervalo de convergencia de las siguientes series de potencia.

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-4)^k (x+1)^k}{\sqrt{2k+1}}$. (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 (x-3)^k}{2^{k-1}}$. (c) $\sum_{k=1}^{\infty} k!(2x-1)^k$.

a) Usamos el TEST de la razón

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-4)^{k+1}(x+1)^{k+1}}{\sqrt{2(k+1)+1}} \cdot \frac{\sqrt{2k+1}}{(-4)^k (x+1)^k} \right|$$

$$\to \lim_{k\to\infty} \left| \frac{-4(x+1)\cdot\sqrt{2k+1}}{\sqrt{2k+3}} \right|$$

$$\to 4|x+1| \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{2k+1}}{\sqrt{2k+3}} = 4|x-1| < 1$$

$\to |x+1| < \frac{1}{4}$, entonces el radio de convergencia es $\frac{1}{4}$.

$$\boxed{R = \frac{1}{4}}$$

$$x+1 < \frac{1}{4} \to x < -\frac{3}{4}$$

$$-x-1 < \frac{1}{4} \rightarrow x > -\frac{5}{4}$$

Ahora debemos ver los extremos

$\boxed{x = -5/4}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-4)^k (-1/4)^k}{\sqrt{2k+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2k+1}}$$

La serie anterior la comparamos con $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{2k+1}}}{\frac{1}{\sqrt{k}}} \rightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{2k+1}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt{\frac{k}{2k+1}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Entonces como $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ diverge

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2k+1}}$ diverge.

$x = -3/4$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-4)^k \cdot (1/4)^k}{\sqrt{2k+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{2k+1}}$$

ocupando el criterio de la serie alternante

$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{\sqrt{2k+1}} = 0 \rightarrow$ converge para $x = -3/4$

→ Intervalo de convergencia → $\left(-\frac{5}{4}, -\frac{3}{4}\right]$

radio convergencia $= \frac{1}{4}$

b) $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{(k+1)^2 (x-3)^{k+1}}{2^k} \cdot \frac{2^{k-1}}{k^2 (x-3)^k}\right|$

$\rightarrow \frac{|x-3|}{2} \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^2}{k^2} = \frac{|x-3|}{2} \cdot 1 < 1$

$\rightarrow |x-3| < 2$ $\rightarrow$ el radio de convergencia es 2

$x-3 < 2 \rightarrow x < 5$

$-x+3 < 2 \rightarrow 1 < x$

$1 < x < 5$

Ahora vemos los extremos:

x = 1

↳ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 \cdot (-2)^k}{2^{k-1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 \cdot (-1)^k}{2^{-1}}$

diverge porque es alternante y el $\lim_{k \to \infty} \frac{k^2 \cdot (-1)^k}{2^{-1}}$ no da 0.

x = 5

↳ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 (2)^k}{2^{k-1}} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot 2$

diverge porque $\lim_{k \to \infty} k^2 \cdot 2 = \infty$

el INTERVALO de convergencia es $(1, 5)$

c) $\lim_{k\to\infty} \left| \frac{(k+1)!\,(2x-1)^{k+1}}{k!\,(2x-1)^{k}} \right|$

$\to \lim_{k\to\infty} |(2x-1)| \cdot \left| \frac{(k+1)\,k!}{k!} \right| < 1$

$|2x-1| \cdot \infty < 1$

$|2x-1| < 0$

El radio es 0

El intervalo es $x = \frac{1}{2}$

Es decir, converge sólo para $\boxed{x = \frac{1}{2}}$

4. Encuentre una serie de potencias cuyo intervalo de convergencia sea $[-1, 8)$.

Queremos un radio de convergencia de

$$\frac{(8-(-1))}{2} = \frac{9}{2}$$, centrado

en $(8 + -1)/2 = 7/2$

→ la serie de potencias de

$$A(x - 7/2)$$

Queremos que después del test nos quede algo del estilo

$$|x - 7/2| < 9/2$$

→ $$\frac{2}{9}|x - 7/2| < 1$$

$\rightarrow \left|\frac{2x-7}{9}\right| < 1$

Usemos potencias de $\left(\frac{2x-7}{9}\right)$

Queremos que converja $x=-1$ y diverja para $x=8$, así que forzaremos que sea $(-1)^k/k$ en $x=-1$ y $1/k$ en $x=8$

Probemos con $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{2x-7}{9}\right)^k$

Veamos si funciona:

$$\lim_{k\to\infty} \left|\left(\frac{2x-7}{9}\right)^{k+1} \cdot \frac{1}{k+1} \cdot \left(\frac{9}{2x-7}\right)^k \cdot k\right|$$

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{2x-7}{9} \cdot \frac{k}{k+1}\right|$$

$\rightarrow \left|\frac{2x-7}{9}\right| \cdot 1 < 1$ → Esto queríamos!!

$x = 8$

↳ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ → diverge.

$x = -1$

↳ $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k}$ → $\lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} = 0$

↳ converge per criterio serie alternate.