Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
MAT1620 – Cálculo II
Segundo Semestre 2025

Ayudantía 14

Integrales Triples: Coordenadas Cilíndricas y Esféricas. Cambios de Variable en Integrales Múltiples

---

Problema 1

Calcule el volumen del sólido interior al cilindro $x^2+y^2 = 2ax$, con $a > 0$ constante, entre el plano $z = 0$ y el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Respuesta

La ecuación del cilindro se puede reescribir como

$$x^2 - 2ax + y^2 = 0 \quad \iff \quad (x-a)^2 + y^2 = a^2$$

Es decir, su intersección con el plano xy es la circunferencia de radio a centrada en $(a, 0)$. El sólido pedido está:

- *horizontalmente*: dentro de esa circunferencia en el plano xy,
- *verticalmente*: entre $z = 0$ y el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (con $z \geq 0$).

Usamos cambio a coordenadas cilíndricas:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad z = z$$

Sustituimos en la ecuación del cilindro:

$$x^2 + y^2 = 2ax \quad \iff \quad r^2 = 2a\,(r\cos\theta)$$

Para $r \geq 0$, esto da

$$r = 2a\cos\theta$$

La condición de estar *en el interior* del cilindro se traduce en

$$r \leq 2a\cos\theta$$

Además, como $r \geq 0$, necesitamos $\cos\theta \geq 0$ para que el lado derecho sea no negativo, es decir

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Por otro lado, el cono está dado por

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{r^2} = r \qquad (\text{pues } r \geq 0)$$

mientras que el plano es $z = 0$. Por lo tanto, para cada punto (r, θ) del dominio en el plano xy, z varía entre

$$0 \leq z \leq r$$

El volumen buscado es $V = \iiint_{\text{sólido}} dV$, y cambiando a coordenadas cilíndricas, con los límites obtenidos, tenemos:

$$V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2a\cos\theta} \int_0^r r \, dz \, dr \, d\theta$$

Primero integramos respecto a z:

$$\int_0^r r \, dz = r \Big[z \Big]_0^r = r^2$$

Entonces $V = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2a\cos\theta} r^2 \, dr \, d\theta$. Integramos en r:

$$\int_0^{2a\cos\theta} r^2 \, dr = \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^{2a\cos\theta} = \frac{(2a\cos\theta)^3}{3} = \frac{8a^3}{3}\cos^3\theta$$

Por tanto, $V = \dfrac{8a^3}{3} \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta \, d\theta$. La función $\cos^3\theta$ es par, así que

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta \, d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta \, d\theta$$

Calculamos

$$\int \cos^3\theta \, d\theta = \int \cos\theta(1 - \sin^2\theta) \, d\theta = \int \cos\theta \, d\theta - \int \cos\theta \sin^2\theta \, d\theta$$

Haciendo $u = \sin\theta$, $du = \cos\theta \, d\theta$, se obtiene

$$\int \cos^3\theta \, d\theta = \sin\theta - \int u^2 \, du = \sin\theta - \frac{u^3}{3} = \sin\theta - \frac{\sin^3\theta}{3}$$

en donde elegimos $C = 0$ pues la integral pedida es definida. Evaluamos entre 0 y $\pi/2$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta \, d\theta = \left[\sin\theta - \frac{\sin^3\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

Por tanto:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta \, d\theta = 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

Sustituyendo en la expresión del volumen:

$$V = \frac{8a^3}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{32}{9}a^3$$

Problema 2

Evalúe

$$\iiint_E x\, e^{x^2+y^2+z^2}\, dV$$

donde E es la porción de la esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ que está en el primer octante.

Respuesta

La región E es el conjunto

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$$

es decir, el "octavo de bola" de radio 1 centrada en el origen, ubicado en el primer octante. Como la región está descrita naturalmente por la condición $x^2+y^2+z^2 \leq 1$, y el integrando contiene el término $x\, e^{x^2+y^2+z^2}$, es conveniente usar coordenadas esféricas. Tomamos el sistema usual de coordenadas esféricas:

$$x = \rho \sin\varphi \cos\theta \qquad y = \rho \sin\varphi \sin\theta \qquad z = \rho \cos\varphi$$

con

$$\rho \geq 0 \quad 0 \leq \varphi \leq \pi \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

El elemento de volumen en estas coordenadas es

$$dV = \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

Analicemos ahora los límites de integración. La condición $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ se traduce en

$$\rho^2 \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq \rho \leq 1$$

Las condiciones del primer octante son:

$$x \geq 0 \quad y \geq 0 \quad z \geq 0$$

En esféricas, esto da:

$$x = \rho \sin\varphi \cos\theta \geq 0 \implies \cos\theta \geq 0 \implies -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$
$$y = \rho \sin\varphi \sin\theta \geq 0 \implies \sin\theta \geq 0 \implies 0 \leq \theta \leq \pi$$
$$z = \rho \cos\varphi \geq 0 \implies 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

Combinando $x \geq 0$ e $y \geq 0$, se obtiene

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Luego, la imagen de E en coordenadas esféricas es:

$$0 \leq \rho \leq 1 \qquad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \qquad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Así, tenemos que la integral buscada es

$$\iiint_E x\, e^{x^2+y^2+z^2}\, dV = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \rho \cos\theta \, \sin\varphi \, e^{\rho^2} \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta = I$$

La integral es producto de funciones separables en cada variable, así que podemos factorizar:

$$I = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \, d\theta \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi \, d\varphi \right) \left(\int_0^1 \rho^3 e^{\rho^2} \, d\rho \right)$$

Calculamos una a una las integrales:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \, d\theta = \Big[\sin\theta \Big]_0^{\pi/2} = 1$$

Para la integral de φ usamos la identidad del ángulo doble $\sin^2\varphi = \dfrac{1-\cos(2\varphi)}{2}$:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi \, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(2\varphi)}{2} \, d\varphi &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, d\varphi - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\varphi) \, d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(2\varphi)}{2} \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Para la integral de ρ hacemos el cambio de variable $t = \rho^2$, de modo que $dt = 2\rho \, d\rho$ y

$$\rho^3 \, d\rho = \rho^2 \cdot \rho \, d\rho = t \cdot \frac{dt}{2}$$

Cuando ρ va de 0 a 1, t también va de 0 a 1. Entonces:

$$\int_0^1 \rho^3 e^{\rho^2} \, d\rho = \frac{1}{2} \int_0^1 t e^t \, dt$$

Calculamos $\displaystyle\int t e^t \, dt$ por partes. Sean:

$$\begin{aligned} u &= t & dv &= e^t \, dt \\ du &= dt & v &= e^t \end{aligned}$$

Luego:

$$\int te^t\,dt = te^t - \int e^t\,dt = te^t - e^t$$

Por tanto

$$\int_0^1 te^t\,dt = \Big[te^t - e^t\Big]_0^1 = -(-1) = 1$$

Luego,

$$\int_0^1 \rho^3 e^{\rho^2}\,d\rho = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Reuniendo los factores, tenemos que el valor de la integral es:

$$\iiint_E x\,e^{x^2+y^2+z^2}\,dV = 1\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\pi}{8}$$

Problema 3

Evalúe la siguiente integral:

$$\iint_D \frac{(x-y)^2}{x+y}\,dA$$

donde D es el paralelogramo delimitado por las rectas:

$$x-y=0 \qquad x-y=2 \qquad x+y=1 \qquad x+y=4$$

Sugerencia: Utilice el cambio de variables

$$u=x-y \qquad v=x+y$$

Respuesta

Para empezar, expresamos x y y en función de u y v:

$$x=\frac{v+u}{2} \qquad y=\frac{v-u}{2}$$

Calculamos el jacobiano:

$$J=\det\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}$$

Entonces, $|J|=\frac{1}{2}$. El dominio en las nuevas coordenadas lo obtenemos notando como se trasladan las variables que definimos:

$$u=x-y\in[0,2]$$

$$v=x+y\in[1,4]$$

es decir,

$$R=\{(u,v):0\le u\le 2,\ 1\le v\le 4\}$$

Transformamos la función a integrar haciendo uso de las variables definidas:

$$\frac{(x-y)^2}{x+y}=\frac{u^2}{v}$$

Del cambio de variable obtenemos una integral sobre una región rectangular (tanto la función como el dominio a integrar se simplificó gracias al cambio)

$$\iint_D \frac{(x-y)^2}{x+y}\,dA=\frac{1}{2}\int_1^4\int_0^2 \frac{u^2}{v}\,du\,dv$$

Resolvemos la integral:

$$\frac{1}{2}\int_1^4 \frac{1}{v}\,dv \int_0^2 u^2\,du = \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{1}{v}\,dv \left[\frac{u^3}{3}\right]_0^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{8}{3}\int_1^4 \frac{1}{v}\,dv = \frac{4}{3}\Big[\ln v\Big]_1^4 = \frac{4\ln(4)}{3}$$

Problema 4 ($\star$)

Considere la transformación $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = F(x, y) = \begin{bmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{bmatrix}$$

a) Muestre que F **no** es uno-a-uno.

b) Encuentre condiciones sobre el dominio de F para que sea uno-a-uno.

c) Utilice lo anterior para calcular

$$\iint_T e^{(x^2-y^2)^2} e^{4x^2y^2} (x^2 + y^2)\, dA$$

donde T es el ánulo $T = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\right\}$, con $0 < a < b$.

Respuesta

a) Sea $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ arbitrario. Es claro ver que

$$F(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} {x_0}^2 - {y_0}^2 \\ 2x_0y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-x_0)^2 - (-y_0)^2 \\ 2(-x_0)(-y_0) \end{bmatrix} = F(-x_0, -y_0)$$

Luego, F no puede ser inyectiva.

b) De la parte anterior vemos que es necesario que el dominio de F no contenga un par de puntos distintos de la forma (x_0, y_0) y $(-x_0, -y_0)$. Veamos que esta condición es suficiente: Supongamos que $F(x_0, y_0) = F(x_1, y_1)$. Entonces:

$${x_1}^2 - {y_1}^2 = {x_0}^2 - {y_0}^2 \tag{1}$$

y

$$x_1y_1 = x_0y_0 \tag{2}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación (1), tenemos

$${x_1}^4 - 2{x_1}^2{y_1}^2 + {y_1}^4 = {x_0}^4 - 2{x_0}^2{y_0}^2 + {y_0}^4$$

lo cual, junto a la ecuación (2), implica que

$${x_1}^4 - {x_0}^4 = {y_0}^4 - {y_1}^4$$

Factorizando:

$$\left({x_1}^2 - {x_0}^2\right)\left({x_1}^2 + {x_0}^2\right) = \left({y_0}^2 - {y_1}^2\right)\left({y_0}^2 + {y_1}^2\right) \tag{3}$$

Por otro lado, de la ecuación (1) tenemos:

$$x_1{}^2 - x_0{}^2 = y_1{}^2 - y_0{}^2 \tag{4}$$

Si algún lado de la ecuación (4) no es 0, entonces podemos simplificar en la ecuación (3) y obtener:

$$x_1{}^2 + x_0{}^2 = -\left(y_0{}^2 + y_1{}^2\right)$$

lo cual implica que $x_0 = x_1 = y_0 = y_1 = 0$, por lo que $(x_1, y_1) = (x_0, y_0)$, y F es uno-a-uno. Por otro lado, si ambos lados de la ecuación (4) son 0, entonces:

$$x_1 = \pm x_0 \qquad\qquad y_1 = \pm y_0$$

De la ecuación (2), se tiene que debe elegirse el mismo signo en ambas igualdades, por lo que $(x_1, y_1) = (x_0, y_0)$ o $(x_1, y_1) = (-x_0, -y_0)$. Luego, si el dominio de F no contiene un par de puntos distintos de la forma (x_0, y_0) y $(-x_0, -y_0)$ −como se menciona al inicio−, entonces F es uno-a-uno.

De este modo, restringimos el dominio de F a cualquier conjunto S de la forma

$$S = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ ax + by > 0\right\}$$

con a y b constantes, no ambas nulas. Geométricamente, S es un semi plano abierto, limitado por (pero que no contiene) una recta que pasa por el origen.

c) Definamos

$$f(x, y) := e^{\left(x^2 - y^2\right)^2} e^{4x^2y^2}(x^2 + y^2) = e^{\left(x^2 - y^2\right)^2 + (2xy)^2}(x^2 + y^2)$$

Obsérvese que f depende solo de x^2 y y^2. En particular,

$$f(\pm x, \pm y) = f(x, y) \qquad f(\pm x, \mp y) = f(x, y)$$

de modo que f es *par* en cada variable y es invariante bajo reflexiones respecto de los ejes. El dominio T (ánulo centrado en el origen) es igualmente invariante bajo dichas simetrías. Por lo tanto, si definimos el cuarto de ánulo abierto en el primer cuadrante

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2, \ x > 0, \ y > 0\}$$

se tiene

$$I = \iint_T f(x, y)\, dA = 4 \iint_D f(x, y)\, dA$$

pues T se descompone (salvo fronteras de medida nula) en la unión disjunta de sus cuatro copias simétricas del cuarto de ánulo, y f toma el mismo valor en cada copia.

Consideremos ahora el cambio de variables dado por F, el cual es uno-a-uno sobre D por lo mostrado anteriormente. La matriz Jacobiana de la transformación es:

$$J\big(T(x,y)\big) = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix}$$

por lo que

$$\det\Big(J\big(T(x,y)\big)\Big) = 4\big(x^2+y^2\big)$$

En D se cumple $x>0$, $y>0$, luego $v=2xy>0$ y $\det(J)>0$. Además

$$u^2+v^2 = \left(x^2-y^2\right)^2 + (2xy)^2 = \left(x^2+y^2\right)^2$$

por lo que la imagen de D bajo T es el *medio ánulo superior*

$$A = \{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \,:\, a^4 \le u^2+v^2 \le b^4,\ v>0\}$$

Nótese que, para utilizar el teorema de cambio de variables para calcular la integral, necesitamos la transformación inversa T^{-1}. Como T es invertible en el dominio escogido, por el teorema de la función inversa tenemos

$$\det\Big(J\big(T^{-1}(x,y)\big)\Big) = \Big(\det\Big(J\big(T(x,y)\big)\Big)\Big)^{-1} = \ldots$$
$$\ldots = \frac{1}{\det\Big(J\big(T(x,y)\big)\Big)} = \frac{1}{4\left(x^2+y^2\right)}$$

Así:

$$\begin{aligned} 4\iint_D f(x,y)\,dx\,dy &= 4\iint_D e^{\left(x^2+y^2\right)^2}\left(x^2+y^2\right)dx\,dy \\ &= 4\iint_A e^{u^2+v^2}\,\frac{\left(x^2+y^2\right)}{4(x^2+y^2)}\,du\,dv \\ &= \iint_A e^{u^2+v^2}\,du\,dv \end{aligned}$$

Cambiando a coordenadas polares en el plano uv, con $u=r\cos\theta$ y $v=r\sin\theta$, el dominio A corresponde a $a^2\le r\le b^2$ y $0<\theta<\pi$. Entonces:

$$\iint_A e^{u^2+v^2}\,du\,dv = \int_0^{\pi}\int_{a^2}^{b^2} e^{r^2}\,r\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{2}\Big[e^{r^2}\Big]_{a^2}^{b^2} = \frac{\pi}{2}\left(e^{b^4}-e^{a^4}\right)$$

Problema 5 (Propuestos)

a) Determine el volumen de la pequeña cuña cortada de la esfera de radio a por dos planos que intersecan a lo largo de un diámetro en un ángulo de $\pi/6$.

b) Sea D la región acotada por la curva $x^{3/2} + y^{3/2} = a^{3/2}$, para $x \geq 0$, $y \geq 0$, y los ejes coordenados $x = 0$, $y = 0$. Dada f continua sobre D, exprese $\iint_D f(x, y)\, dA$ como una integral sobre el triángulo D^*, que es el conjunto de puntos con $0 \leq u \leq a$, $0 \leq v \leq a - u$.

c) Denotemos por R la región dentro de $x^2 + y^2 = 1$, pero fuera de $x^2 + y^2 = 2y$, con $x \geq 0$, $y \geq 0$.

   i. Esboce esta región en el plano xy.

   ii. Sea $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = T(x, y) = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 - 2y \end{bmatrix}$. Esboce la región D en el plano uv que corresponde a R bajo este cambio de coordenadas.

   iii. Calcular $\iint_R xe^y\, dA$ usando este cambio de coordenadas.

   iv. Calcule la integral del inciso anterior usando cambio a coordenadas polares. Compare ambos métodos.

Respuesta

a) Consideremos la esfera de radio a centrada en el origen:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que los dos planos se intersecan a lo largo del eje z (que es un diámetro de la esfera), y forman un ángulo diédrico de $\pi/6$. Por ejemplo, podemos tomar:

- el plano Π_1: $x = 0$
- el plano Π_2: $y = \big(\tan(\pi/6)\big)\, x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\, x$

los cuales se intersecan a lo largo del eje z y forman un ángulo de $\pi/6$ en torno a dicho eje. La cuña esférica buscada es la parte de la esfera comprendida entre estos dos planos.

Usamos coordenadas esféricas estándar:

$$x = \rho \sin\varphi \cos\theta \qquad y = \rho \sin\varphi \sin\theta \qquad z = \rho \cos\varphi$$

con

$$\rho \geq 0 \quad 0 \leq \varphi \leq \pi \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

El elemento de volumen es

$$dV = \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

La esfera de radio a se describe como

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2 \quad \iff \quad 0 \leq \rho \leq a$$

Los planos Π_1 y Π_2, al actuar como planos verticales que pasan por el eje z, se traducen en restricciones sobre el ángulo θ. Proyectando en el plano xy, se deduce que $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{6}$.

En dirección polar respecto del eje z, la cuña abarca toda la esfera, así que no hay restricción adicional en φ, es decir, $0 \leq \varphi \leq \pi$.

El volumen buscado es

$$\begin{aligned}
V &= \iiint_{\text{cuña}} dV = \int_0^{\pi/6} \int_0^{\pi} \int_0^{a} \rho^2 \sin\varphi \; d\rho \, d\varphi \, d\theta \\
&= \left(\int_0^{\pi/6} d\theta \right) \left(\int_0^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi \right) \left(\int_0^{a} \rho^2 \, d\rho \right) \\
&= \frac{\pi}{6} \cdot \Big[-\cos\varphi \Big]_0^{\pi} \cdot \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^{a} \\
&= \frac{\pi}{6} \cdot \big(\cos(0) - \cos(\pi) \big) \cdot \frac{a^3}{3} \\
&= \frac{\pi}{6} \cdot 2 \cdot \frac{a^3}{3} = \frac{\pi a^3}{9}
\end{aligned}$$

Como comentario adicional, la cuña esférica corresponde a una fracción de la esfera completa. El ángulo azimutal total de la esfera es 2π, y nuestra cuña ocupa un ángulo $\pi/6$ alrededor del eje z, de modo que representa la fracción

$$\frac{\text{ángulo de la cuña}}{\text{ángulo total}} = \frac{\pi/6}{2\pi} = \frac{1}{12}$$

del volumen total de la esfera de radio a, cuyo volumen es $V_{\text{esfera}} = \dfrac{4}{3}\pi a^3$. Entonces:

$$V_{\text{cuña}} = \frac{1}{12} \cdot \frac{4}{3}\pi a^3 = \frac{4\pi a^3}{36} = \frac{\pi a^3}{9}$$

en perfecto acuerdo con el cálculo integral.

b) Definimos el cambio de variables

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = T(x,y) = \frac{1}{\sqrt{a}} \begin{bmatrix} x^{3/2} \\ y^{3/2} \end{bmatrix}$$

Como $x, y \geq 0$, se tiene $u, v \geq 0$. Además,

$$x^{3/2} + y^{3/2} = a^{3/2} \iff \frac{x^{3/2}}{\sqrt{a}} + \frac{y^{3/2}}{\sqrt{a}} = a \iff u + v = a$$

esto es, la frontera curvilínea de D se vuelve la recta $u + v = a$. Los ejes $x = 0$ y $y = 0$ se envían a $u = 0$ y $v = 0$, respectivamente. Por lo tanto, la imagen de D es exactamente el triángulo

$$D^* = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq u \leq a \,\wedge\, 0 \leq v \leq a - u\}$$

La matriz Jacobiana de la transformación es:

$$J\big(T(x,y)\big) = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{3}{2\sqrt{a}} \begin{bmatrix} \sqrt{x} & 0 \\ 0 & \sqrt{y} \end{bmatrix}$$

por lo que

$$\det\Big(J\big(T(x,y)\big)\Big) = \frac{9\sqrt{xy}}{4a}$$

En el interior de D se cumple $x > 0$, $y > 0$, luego $\det(J) > 0$, y solo falla sobre la frontera $x = 0$ o $y = 0$, que es de medida nula.

Nótese que, para utilizar el teorema de cambio de variables para plantear la integral, necesitamos la transformación inversa T^{-1}, obtenible desde la ecuación de cambio de variables:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = T^{-1}(u,v) = \sqrt[3]{a} \begin{bmatrix} u^{2/3} \\ v^{2/3} \end{bmatrix}$$

Por el teorema de la función inversa, el Jacobiano de la inversa es:

$$\det\Big(J\big(T^{-1}(x,y)\big)\Big) = \Big(\det\Big(J\big(T(x,y)\big)\Big)\Big)^{-1} = \ldots$$

$$\ldots = \frac{1}{\det\Big(J\big(T(x,y)\big)\Big)} = \frac{4a}{9\sqrt{xy}} = \frac{4a^{2/3}}{9\sqrt[3]{uv}}$$

Aplicando el teorema de cambio de variables:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} f\left(a^{1/3}u^{2/3},\, a^{1/3}v^{2/3}\right)\,\frac{4a^{2/3}}{9\sqrt[3]{uv}}\,du\,dv$$

c) i. Las curvas son:

$$x^2+y^2=1$$
$$x^2+y^2=2y \iff x^2+(y-1)^2=1$$

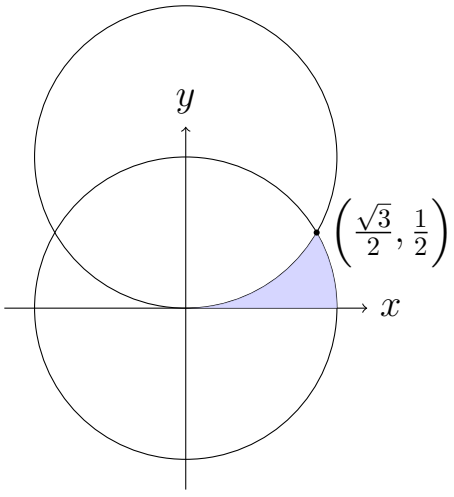
El punto de intersección de ambas curvas en el primer cuadrante se obtiene resolviendo

$$x^2+y^2=1 \qquad x^2+(y-1)^2=1$$

Restando las ecuaciones: $2y=1 \implies y=\dfrac{1}{2}$, y sustituyendo:

$$x^2=1-y^2=\frac{3}{4} \implies x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por tanto, las curvas se cortan en $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$. La región R está **dentro** de la circunferencia unitaria y **fuera** de la circunferencia centrada en $(0,1)$, restringida a $x,y\geq 0$. El gráfico es:



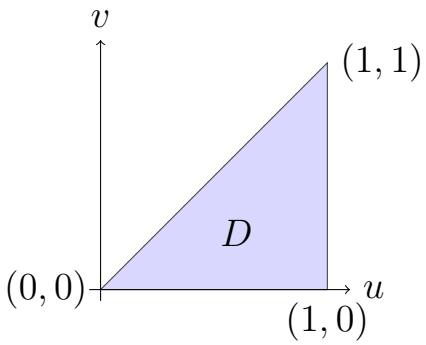
ii. El cambio propuesto es

$$u=x^2+y^2 \qquad v=x^2+y^2-2y$$

De la segunda ecuación: $v=u-2y \implies y=\dfrac{u-v}{2}$. Del límite exterior $x^2+y^2=1$ se obtiene $u=1$. Del límite interior $x^2+y^2=2y$ se obtiene

$v = 0$. De la condición $y \geq 0$ se obtiene $u \geq v$. Por tanto, la imagen es el triángulo

$$D = \{(u, v) : 0 \leq v \leq u \leq 1\}$$



Región D correspondiente a R bajo T

iii. El Jacobiano de T es

$$J(T) = \det \begin{bmatrix} \partial u/\partial x & \partial u/\partial y \\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2x & 2y - 2 \end{bmatrix} = -4x$$

En el primer cuadrante $x > 0$, por lo que $|J(T)| = 4x$, y por el teorema de la función inversa:

$$J\left(T^{-1}\right) = (J(T))^{-1} = \frac{1}{J(T)} = \frac{1}{4x}$$

Sustituyendo en el integrando:

$$xe^y \, dx \, dy = x \, e^{(u-v)/2} \, \frac{1}{4x} \, du \, dv = \frac{1}{4} e^{(u-v)/2} \, du \, dv$$

Así:

$$\iint_R xe^y \, dA = \frac{1}{4} \iint_D e^{(u-v)/2} \, du \, dv = \frac{1}{4} \int_0^1 \int_0^u e^{(u-v)/2} \, dv \, du$$

Evaluamos la integral interior:

$$\int_0^u e^{-v/2} \, dv = 2(1 - e^{-u/2})$$

por lo que

$$\iint_R xe^y \, dA = \frac{1}{4} \int_0^1 e^{u/2} \cdot 2(1 - e^{-u/2}) \, du = \frac{1}{2} \int_0^1 (e^{u/2} - 1) \, du$$

Finalmente:

$$\iint_R xe^y \, dA = \frac{1}{2} \Big[2(e^{1/2} - 1) - 1 \Big] = e^{1/2} - \frac{3}{2}$$

iv. En polares $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ y $dA = r\,dr\,d\theta$. Las curvas son:

$$\begin{cases} r = 1 \\ r = 2\sin\theta \end{cases} \qquad \text{y en el primer cuadrante } 0 \le \theta \le \pi/6$$

Entonces

$$\begin{aligned} \iint_R xe^y\,dA &= \int_0^{\pi/6}\int_{2\sin\theta}^{1} (r\cos\theta)\,e^{r\sin\theta}\,r\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{\pi/6}\cos\theta\int_{2\sin\theta}^{1} r^2 e^{r\sin\theta}\,dr\,d\theta \end{aligned}$$

Integrando (note que se utiliza integración por partes *dos* veces):

$$I = \int_0^{\pi/6}\cos\theta\left[\frac{r^2}{\sin\theta}e^{r\sin\theta} - \frac{2r}{(\sin\theta)^2}e^{r\sin\theta} + \frac{2}{(\sin\theta)^3}e^{r\sin\theta}\right]_{r=2\sin\theta}^{r=1} d\theta$$

lo cual, tras simplificación, entrega el mismo valor numérico

$$I = e^{1/2} - \frac{3}{2}$$

El cambio $(u, v) = (x^2+y^2,\, x^2+y^2-2y)$ linealiza las fronteras curvilíneas y reduce el problema a una integral sobre un triángulo, mientras que las coordenadas polares aprovechan la simetría circular, aunque la integración resulta más complicada que con el cambio propuesto. En ambos casos, el resultado final coincide.