Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
MAT1620 – Cálculo II
Segundo Semestre 2025

Ayudantía 15

Repaso exámen.

Problema 1

El *valor promedio* de una función $f(x, y, z)$ sobre una región sólida E se define como

$$f_{\text{prom}} = \frac{1}{V(E)} \iiint_E f(x, y, z)\ dV$$

donde $V(E)$ es el volumen de E.
Encuentre el valor promedio de la función $f(x, y, z) = x^2z + y^2z$ sobre la región encerrada por el paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ y el plano $z = 0$.

Respuesta

La región

$$E = \left\{(x, y, z) : (x, y) \in D,\ 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\right\}$$

donde

$$D = \left\{(x, y) : 0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\right\} = \left\{(r, \theta) : 0 \leq \theta < 2\pi,\ 0 \leq r \leq 1\right\}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
V(E) &= \iint_D \int_0^{1-x^2-y^2} 1\ dz\ dA \\
&= \iint_D 1 - x^2 - y^2\ dA \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2) \cdot r\ dr\ d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r - r^3\ dr\ d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\ d\theta \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\iiint_E x^2z + y^2z \; dV &= \iint_D \int_0^{1-x^2-y^2} x^2z + y^2z \; dz \; dA \\
&= \iint_D (x^2+y^2) \cdot \left(\frac{z^2}{2}\Big|_0^{1-x^2-y^2} \right) \; dA \\
&= \iint_D (x^2+y^2) \cdot \frac{(1-x^2-y^2)^2}{2} \; dA \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \cdot (1-r^2)^2 \cdot r \; dr \; d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 - 2r^5 + r^7 \; dr \; d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} - \frac{2}{6} + \frac{1}{8} \; d\theta \\
&= \frac{\pi}{24}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $f_{\text{prom}} = \frac{1}{12}$.

Problema 2

Encuentre la región E tal que

$$I = \iiint_E (1 - x^2 - 2y^2 - 3z^2) \mathrm{d}V$$

se maximiza. Luego evalúe la integral.

Respuesta

Nótese que el integrando toma valores no-negativos para $x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 1$ y negativos fuera de este conjunto. Luego, para obtener el máximo debemos integrar en la totalidad de la región en que toma valores no-negativos.

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 1\}$$

Utilizando el cambio de variable $x = x, y = \frac{u}{\sqrt{2}}, z = \frac{v}{\sqrt{3}}$. El jacobiano se calcula:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}}$$

Luego queremos integrar,

$$\iiint_{E'} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} (1 - x^2 - u^2 - v^2) \mathrm{d}x\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
$$E' = \{(x, u, v) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + u^2 + v^2 \leq 1\}$$

Utilizamos coordenadas esféricas:

$$x = \rho \cos\theta \sin\varphi, \quad u = \rho \sin\theta \sin\varphi, \quad v = \rho \cos\varphi, \quad \text{con } \mathrm{d}V = \rho^2 \sin\varphi \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi.$$

La integral se transforma en:

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(1 - \rho^2\right) \rho^2 \sin\varphi \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\rho$$

Que se separa como:

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \left(\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \rho^2 \sin\varphi \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\rho - \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \rho^4 \sin\varphi \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\rho \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\left(\int_0^1 \rho^2 \mathrm{d}\rho \right) \left(\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \right) \left(\int_0^{\pi} \sin\varphi \, \mathrm{d}\varphi \right) - \left(\int_0^1 \rho^4 \, \mathrm{d}\rho \right) \left(\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \right) \left(\int_0^{\pi} \sin\varphi \, \mathrm{d}\varphi \right) \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot 2 - \frac{1}{5} \cdot 2\pi \cdot 2 \right) = \frac{8\pi}{15\sqrt{6}}$$

Problema 3 (cap. 1)

Determine el valor de p para que la integral

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p}$$

sea convergente.

Respuesta

La integral es impropia ya que $\ln 1 = 0$, generando este punto conflictivo. Se puede hacer un cambio de variable $u = \ln x \implies \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}$. Así

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p} &= \int_{\ln 1}^{\ln 2} \frac{\mathrm{d}u}{u^p} \\ &= \int_0^{\ln 2} \frac{\mathrm{d}u}{u^p}.\end{aligned}$$

Se tiene una integral p que converge para $p < 1$ (ya que el intervalo de integración se encuentra entre 0 y 1).

Problema 4

Reescriba la integral triple

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{1-y} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

como una integral triple con el orden de integración $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ y, considerando esto, calcule el volumen de la región

$$R := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, \sqrt{x} \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1-y\}$$

Respuesta

Nótense las desigualdades de la región:

$$0 \leq x \leq 1, \qquad \sqrt{x} \leq y \leq 1, \qquad 0 \leq z \leq 1-y$$

Cuando $x = 0$ y $y = 0$, entonces $z = 1$, el cual es su máximo valor (pues y es no negativo). Por ello, $0 \leq z \leq 1$ (se mueve entre esos valores). Como $0 \leq x \leq y^2 \leq 1$ de la segunda desigualdad y $z \leq 1-y$ de la tercera desigualdad, es que se tiene $0 \leq z \leq 1-y$. Se concluye con el nuevo orden de desigualdades:

$$0 \leq z \leq 1, \qquad 0 \leq y \leq 1-z, \qquad 0 \leq x \leq y^2$$

Por lo tanto:

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{1-y} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{y^2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

Para el volumen basta con calcular la integral para $f \equiv 1$:

$$\begin{aligned}
V &= \iiint_R dV = \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{y^2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-z} y^2 \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 \frac{y^3}{3}\bigg|_0^{1-z} \mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 \frac{(1-z)^3}{3} \mathrm{d}z \\
&= \frac{-(1-z)^4}{12}\bigg|_0^1 \\
&= \frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

⋆ **Problema 5 (cap. 2)**

Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función con derivadas parciales continuas y $h'(0) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Considérese la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = h(x^3 + 2y^3 - 4x)$$

y la dirección unitaria $\vec{v} = \frac{1}{2}(1, \sqrt{3})$. Demuestre que el conjunto

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : D_{\vec{v}} f(\vec{x}) = 0\right\}$$

es una elipse, donde $D_{\vec{v}} f(x, y)$ denota la derivada direccional de f en (x, y) en la dirección $\vec{v}$.

Respuesta

Por la regla de la cadena,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{dh}{dt}(3x^2 - 4) \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{dh}{dt}(6y^2).$$

Luego,

$$D_{\vec{v}} f = \nabla f \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}\frac{dh}{dt}(3x^2 - 4) + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{dh}{dt}(6y^2) = \frac{dh}{dt}\left(\frac{3}{2}x^2 + 3\sqrt{3}y^2 - 2\right).$$

Así, $D_{\vec{v}} f(x, y) = 0$ si y sólo si

$$\frac{3}{2}x^2 + 3\sqrt{3}y^2 - 2 = 0,$$

pues $\frac{dh}{dt} \neq 0$, lo cual describe la elipse

$$\frac{3}{4}x^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}y^2 = 1.$$

Problema 6 (Propuesto)

Demuestre que

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xyz}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}.$$

(Nadie ha sido capaz de hallar el valor exacto de la suma de esta serie.)

Hint: El teorema de Tonelli indica que si $f_n \geq 0$, y es medible (p. ej. $(xyz)^n$), entonces $\int \sum_{n=0}^{\infty} f_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int f_n$.

Respuesta

Se puede notar que el integrando tiene la forma de una serie geométrica, y converge ya que $x, y, z < 1 \implies xyz < 1$. Resultando en que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xyz}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (xyz)^n\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (xyz)^n\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} I_n.
\end{aligned}$$

Nota: el cambio se puede hacer invocando el teorema explicado en el Hint.

Aplicando el teorema de Fubini, se tiene

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x \int_0^1 y^n\,\mathrm{d}y \int_0^1 z^n\,\mathrm{d}z \\
&= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \left[\frac{y^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \left[\frac{z^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{(n+1)^3}.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xyz}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}.$$

Problemas Extra

Los siguientes son problemas recomendados del libro guía (Stewart) para reforzar la materia del capítulo 3.

Importante: estos ejercicios son simplemente una recomendación por su variedad de temas, y no tienen relación alguna con los ejercicios que se vayan a evaluar durante el exámen. Su objetivo es únicamente ejercitar los contenidos que no han sido evaluados.

Capítulo 15.2

27. Encuentre el volumen del sólido que está debajo del paraboloide elíptico

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z = 1$$

y arriba del rectángulo $R = [-1, 1] \times [-2, 2]$.

37. Use simetría para calcular $\displaystyle\iint_R \frac{xy}{1+x^4}\, dA, \qquad R = \{(x, y) \mid -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$

Capítulo 15.3

49. $\displaystyle\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2}\, dx\, dy$. Calcule la integral invirtiendo el orden de integración.

53. $\displaystyle\int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx\, dy$

62. Al evaluar una integral doble sobre una región D, se obtuvo una suma de integrales iteradas como sigue:

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_0^1 \int_0^{2y} f(x, y)\, dx\, dy + \int_1^3 \int_0^{3-y} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Bosqueje la región D y exprese la integral doble como una integral iterada con orden inverso de integración.

Capítulo 15.4

15. Calcule el área de un pétalo de la rosa $r = \cos 3\theta$.

18. Calcule el área de la región dentro del cardioide $r = 1 + \cos\theta$ y fuera de la circunferencia $r = 3\cos\theta$.

20. Calcule el volumen bajo el paraboloide $z = 18 - 2x^2 - 2y^2$ y arriba del plano xy.

22. Calcule el volumen dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ y fuera del cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

25. Calcule el volumen arriba del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y bajo la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

39. Utilice coordenadas polares para combinar la suma

$$\int_{1/\sqrt{2}}^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^x xy\, dy\, dx \ + \ \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^x xy\, dy\, dx \ + \ \int_{\sqrt{2}}^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} xy\, dy\, dx$$

dentro de una integral doble. Después evalúe la doble integral.

Capítulo 15.8

24. Encuentre el volumen del sólido que está entre el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.
25. Encuentre el volumen de la región E acotada por los paraboloides $z = x^2 + y^2$ y $z = 36 - 3x^2 - 3y^2$.

Capítulo 15.9

26. Evalúe $\iiint_E xyz\,dV$, donde E está entre las esferas $\rho = 2$ y $\rho = 4$ y arriba del cono $\phi = \pi/3$.
30. Encuentre el volumen de la parte de la esfera $\rho \leq a$ que está entre los conos $\phi = \pi/6$ y $\phi = \pi/3$.
46. Demuestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, e^{-(x^2+y^2+z^2)}\,dx\,dy\,dz = 2\pi.$$

Capítulo 15.10

19. $\iint_R xy\,dA$, donde R es la región en el primer cuadrante acotada por las rectas $y = x$ y $y = 3x$ y las hipérbolas $xy = 1$, $xy = 3$; $x = u/v,\ y = v$.
25. Evalúe usando cambio de variables la integral

$$\iint_R \cos\left(\frac{y-x}{y+x}\right)\,dA,$$

donde R es la región trapezoidal con vértices $(1,0)$, $(2,0)$, $(0,2)$ y $(0,1)$.

28. Sea f continua sobre $[0,1]$ y sea R la región triangular con vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$. Demuestre que

$$\iint_R f(x+y)\,dA = \int_0^1 u\,f(u)\,du.$$