Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
MAT1620 - Cálculo II - Sección 2 - 2014-02
Profesor: José López

Ayudantía IV

Coordenadas Polares e Introducción de Integrales Impropias

Ayudante: Daniel Araya - dtaraya@uc.cl

Fórmulas

• Conversión de coordenadas polares a cartesianas

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\theta) \\ y &= r\sin(\theta) \end{aligned}$$

• Conversión de coordenadas cartesianas a polares

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \tan(\theta) &= \frac{y}{x} \end{aligned}$$

• Longitud de arco en coordenadas polares

$$ds = \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\theta$$

• Área entre regiones polares

El área abarcada entre dos funciones polares $r = f(\theta)$ y $r = g(\theta)$ para $\theta \in [\theta_2, \theta_1]$ es:

$$A = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} (f^2(\theta) - g^2(\theta))\, d\theta, \qquad \theta_2 \geq \theta_1$$

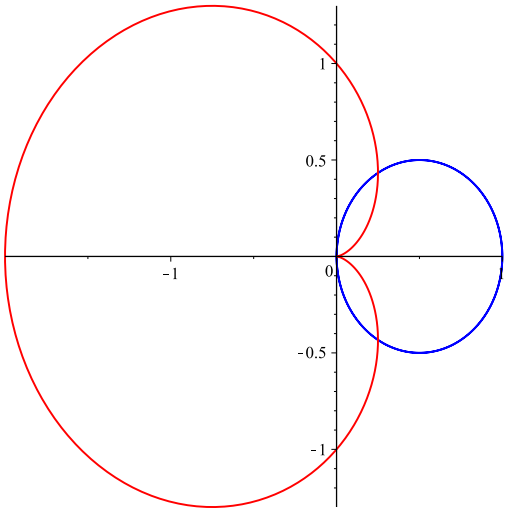
Problemas

Problema 1

Encuentre el área de la region resultante de la intersección de $r_1(\theta) = \cos(\theta)$ y $r_2(\theta) = 1 - \cos(\theta)$.

Solución:

Primero debemos tener claro de que en qué region estamos trabajando. Gráficamos:



Busquemos los angulos críticos en donde se intersectan ambas regiones, para eso simplemente igualamos $r_1(\theta) = r_2(\theta)$:

$$\begin{array}{rrcl} & r_1(\theta) & = & r_2(\theta) \\ \Leftrightarrow & \cos(\theta) & = & 1 - \cos(\theta) \\ \Leftrightarrow & \cos(\theta) & = & \dfrac{1}{2} \\ \Rightarrow & \theta = -\dfrac{\pi}{3} & \vee & \theta = \dfrac{\pi}{3} \end{array}$$

Luego es evidente que tenemos que barrer para:

- $\theta \in \left[-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right]$: con $r_2(\theta)$
- $\theta \in \left[\dfrac{\pi}{3}, -\dfrac{\pi}{3}\right]$: con $r_1(\theta)$

Finalmente todo se reduce a resolver la integral:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} {r_2}^2(\theta)\, d\theta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} {r_1}^2(\theta)\, d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} {r_1}^2(\theta)\, d\theta \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (1 - \cos(\theta))^2\, d\theta + 2 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\theta)\, d\theta \right) \\ &= \ldots \\ &= \frac{7\pi}{12} - \sqrt{3} \end{aligned}$$

Concluyendo lo pedido. ■

Problema 2

Del problema 1, encuentre el área de la region encerrada por $r_1(\theta) = \cos(\theta)$ y que se encuentra fuera de $r_2(\theta) = 1 - \cos(\theta)$.

Solución:

En este caso notemos que entre $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ barremos toda la circunferencia, nos faltaría quitar los 'petalos' formados entre r_1 y r_2, entonces es evidente que el área a calcular es:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} {r_1}^2(\theta)\, d\theta - \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} {r_2}^2(\theta)\, d\theta - 2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} {r_1}^2(\theta)\, d\theta \\ &= ... \\ &= \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

Concluyendo lo pedido. ■

Problema 3 (I1-2010-2)

Calcule el largo de la curva cuya representación en coordenadas polares es:

$$r(\theta) = 2^\theta, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Solución:

Sabemos que la longitud de arco L de una función polar $r(\theta)$ entre los angulos $\theta \in [\alpha, \beta]$ es:

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\theta$$

Trivialmente, como $r' = \ln(2)2^\theta$ la integral a resolver es:

$$\begin{aligned} L &= \int^{2\pi} \sqrt{2^{2\theta} + (\ln(2)2^\theta)^2}\, d\theta \\ &= \sqrt{1 + \ln^2(2)} \int_0^{2\pi} 2^\theta\, d\theta \\ &= \sqrt{1 + \ln^2(2)} \int_0^{2\pi} e^{\ln 2^\theta}\, d\theta \\ &= \sqrt{1 + \ln^2(2)} \int_0^{2\pi} e^{\theta \ln 2}\, d\theta \\ &= \sqrt{1 + \ln^2(2)} \frac{e^{\theta \ln 2}}{\theta \ln 2}\Big|_0^{2\pi} \\ &= \sqrt{1 + \ln^2(2)} \frac{2^\theta}{\theta \ln 2}\Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{2^{2\pi}}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} \end{aligned}$$

Problema 4

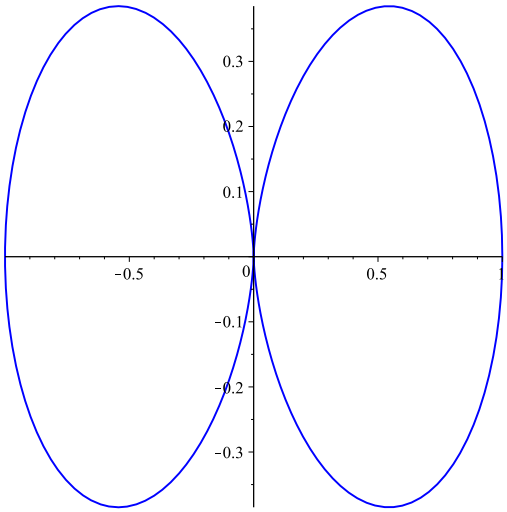
Sea la función polar $r = \cos^2(\theta)$.

a) Esboce el gráfico de la función.

b) Calcule el volumen del cuerpo generado al rotar alrededor del eje OX.

Solución:

a) El gráfico es:



b) En primera instancia, no sabemos rotar funciones polares, por ello realicemos el cambio de varaible polares a cartesianas:

$$\Rightarrow x = \cos^3(\theta)$$
$$y = \cos^2(\theta)\sin(\theta)$$

Realicemoslo por el método de los Discos, como la imágen es simétria, usemos sólo la parte superior:

$$
\begin{aligned}
V &= \int \pi f^2(x)\,dx \\
\Rightarrow V &= \int_{x_1}^{x_2} \pi f^2(x)\,\frac{dx}{d\theta}d\theta \\
\Rightarrow V &= \int_{\pi}^{0} \pi\cos^4(\theta)\sin^2(\theta)\cdot(-3\cos^2(\theta)\sin(\theta))\,d\theta \\
V &= 3\int_0^{\pi} \cos^6(\theta)\sin^3(\theta)\,d\theta \qquad\qquad u=\cos(\theta)\rightarrow du=-\sin(\theta)\,d\theta \\
\Rightarrow V &= -3\int_1^{-1} u^6(1-u^2)\,du \\
V &= 3\left(\frac{u^7}{7}-\frac{u^9}{9}\right)\Big|_{-1}^{1} \\
\Rightarrow V &= \frac{4}{21}
\end{aligned}
$$

Problema 5

Sea la función polar $r=\theta^2$ con $0\leq\theta\leq 3\theta$.

a) Diga cuantas veces la función se encuentra con el eje x considerando el primer encuentro en $\theta=0$. Luego grafique la función.

b) De la gráfica encontrada, encuentre el área de la región $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}=\{0\leq r\leq\theta^2\,|\,0\leq\theta\leq 2\pi\}.$$

Solución

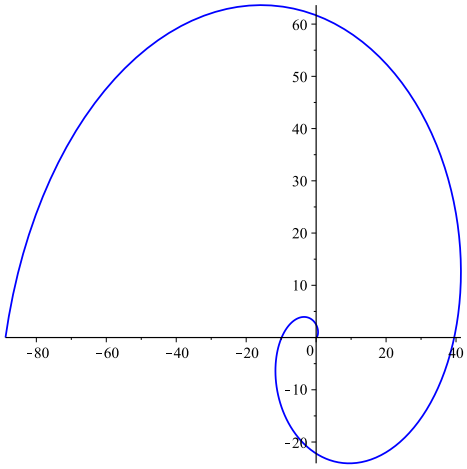
a) Sabemos que la curva toca el eje x cuando $y=0$, como:

$$
\begin{aligned}
y &= r\sin(\theta) \\
\Rightarrow y &= \theta^2\sin(\theta)
\end{aligned}
$$

Como $0\leq\theta\leq 3\theta$

$$\Rightarrow \theta=0\vee\theta=-\pi\vee\theta=2\pi\vee\theta=3\pi$$

Luego encuentra al eje x en 4 ocasiones. Finalmente su gráfica es:



b) Vemos que la función se mueve/gira en sentido antihorario (OJO estamos en coordenadas polares, es decir, se mueve en el sentido en que evoluciona θ), esto implica que el *loop* formado tiene orientación *positiva*. Luego el área a encontrar es:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_{\theta_i}^{\theta_f} r^2(\theta)\, d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \theta^4\, d\theta \\ &= \frac{1}{2}\frac{\theta^5}{5}\Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{32\pi^5}{10} = \frac{16\pi^5}{5}. \end{aligned}$$

Concluyendo lo pedido. ■

Problema 6

Determine que tipo de integral impropia se trata y calcule su valor

1. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\cos(x), dx$

   Respuesta: $\dfrac{1}{2}$

2. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x(1+x^2)}, dx$

   Respuesta: $\dfrac{\ln(2)}{2}$

Problema 7

Sea: $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-px}\, dx$ ¿Para qué valores de p el valor de la integral existe? (i.e, converge).

Respuesta: Converge para $p < 0$ y tomar el valor de $\frac{1}{p^2}$.