Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
MAT1620 - Cálculo II - Sección 2 - 2014-02
Profesor: José López

Ayudantía VI

Series

Ayudante: Daniel Araya - dtaraya@uc.cl

Proposiciones

Proposición 1 Condición de necesidad:

$$\text{Si } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ es convergente} \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Proposición 2

Si las series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son convergentes y la serie $\sum c_n$ es divergente entonces:

$$\begin{array}{l} \sum (a_n \pm b_n) \quad \text{es convergente} \\ \sum (a_n \pm c_n) \quad \text{es divergente} \end{array}$$

Series notables

- Serie Armónica: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente.
- Serie Geométrica: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ es convergente ssi $|r| < 1$ con $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$
- Series p: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ es convergente ssi $p > 1$

Criterio de la Integral

Sea: $\begin{cases} f[n] \text{ continua} \\ f[n] \text{ decreciente en } [1, -\infty) \\ f[n] > 0 \text{ para } x > 1 \end{cases}$ entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f[n] \text{ es convergente } \Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x)\,dx \text{ es convergente}$$

Criterio del Cuociente de D'Alembert y de la Raíz de Cauchy:

Sea $a_n > 0$ a partir de un $n > N$ para algún N. Sea $A = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \ \vee \ A = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Entonces si:

$$\begin{array}{rcl} 0 \leq A < 1 & \Rightarrow & \sum a_n \text{ converge } \underline{\text{absolutamente}} \text{ como una serie geométrica.} \\ A = 1 & \Rightarrow & \text{El criterio no nos dice nada.} \\ A > 1 & \Rightarrow & \sum a_n \text{ diverge como una serie geométrica.} \end{array}$$

Criterio de la Serie Alternante de Leibniz:

Sea la serie alternante $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ luego si

$$\left\{ \begin{array}{l} a_n > 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \\ a_n \text{ es decreciente a partir de un } n > N \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \text{ es convergente}$$

Estimación o Residuo de una serie

Sea $f(x)$ una función continua y sea la sucesión $a_n > 0$ tal que $f[n] = a_n$. Sea $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ la suma parcial hasta el e-nésimo termino de una serie $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Luego la estimación o residuo de aproximar S con S_n es:

$$R_n = S - S_n$$

la cual está acotada por:

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \leq R_n \leq \int_{n}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Problemas

Problema 1

Calcule las siguientes series:

1. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$

   ¡Propuesto! - Solución: $\dfrac{3}{4}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^n+3^n}{6^n}\right)$

¡Propuesto! - Solución: $\dfrac{3}{2}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(3\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{2}{n(n+1)}\right)$

Solución

Sabemos que:

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

$$\therefore\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1},\quad\leftarrow\quad\text{por prop. telescópica}$$

$$\therefore\sum_{k=1}^{\infty}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

Luego,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left(3\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{2}{n(n+1)}\right)&=3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\\&=3\left(\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+...\right)+2\cdot1\\&=3\left(\frac{2}{3}\right)\left(1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+...\right)+2\\&=3\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right)+2=6+2=8.\blacksquare\end{aligned}$$

4. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+3}{(k-1)k(k+2)}$

¡Propuesto! - Solución: $\dfrac{5}{3}+\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)$

Problema 2

Estudie la convergencia de las siguientes series. Si alguna depende de parámetros, diga para qué valores de estos la serie converge:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$

Solución

Notemos que

$$\frac{2}{n2^n} < \frac{1}{2^n}$$

Luego por criterio de comparación, como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge (pues $|r| = \frac{1}{2} < 1$)

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} \quad \text{converge.} \quad \blacksquare$$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n^2+n}}$

Solución

Notemos que en el infinito:

$$\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n^2+n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n^2}} = \frac{1}{n^{3/2}}$$

Esto se debe a que en el infinito de la expresión $\sqrt{n^2+n}$ el termino preponderante es n^2, por lo que el termino n se puede "despreciar" Luego sean $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n^2+n}}$ y $b_n = \dfrac{1}{n^{3/2}}$. Luego por criterio del paso al límite:

$$A = \lim_{m\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/2}}{\sqrt{n}\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}} = 1$$

es decir, a_n se comporta como b_n. Finalmente como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge (pues $p = 3/2 > 1$), $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. $\blacksquare$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}$

Solución

Resolvamoslo mediante el criterio del cuociente de D'Alembert, sea

$$a_n = \frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$$
$$\rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{2}{5}\right)^{n}$$
$$\Rightarrow A = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{2}{5}$$

Luego como $A < 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}$ converge absolutamente como una serie geométrica. ■

4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(n)}{n}$

Solución

Resolvamoslo mediante el criterio de la serie alternante de Leibniz. PDQ: $a_n > 0$, decreciente y $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Trivialmente a partir de $n > 1$ tenemos que $a_n = \frac{\ln(n)}{n} > 0$.
$\therefore a_n > 0$

Luego sea $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$, vemos que $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln(x)\cdot 1}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2} < 0$ para $x > e$
$\therefore f[n] = \frac{\ln(n)}{n}$ es decreciente a partir de un $n > e$

Además $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n)}{n} \overbrace{=}^{\mathcal{L}'\mathcal{H}} \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1} = 0$

$\therefore$ Por criterio de Leibniz, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(n)}{n}$converge. ■

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}$

Solución

Por criterio del cuociente: Sean

$$a_n = \frac{n!}{3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-1)} \longrightarrow a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n+1)}$$

$$\Rightarrow A = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}}{\frac{n!}{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$$

Como $A = \frac{1}{2} < 1 \Longrightarrow$ La serie converge. ■

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+\ln(n))^n}{n^n+1}$

Solución

Notar que $a_n = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+\ln(n))^n}{n^n+1} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+\ln(n))^n}{n^n}$

Luego sea $b_n = \dfrac{(1+\ln(n))^n}{n^n}$, así a_n converge si b_n converge. Por criterio de la raíz de Cauchy:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(1+\ln(n))^n}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\ln(n)}{n} = 0$$

Luego como $A = 0 < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. ■

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}} + n^{\frac{3}{2}}}$

Solución

Sea $a_n = \dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}} + n^{\frac{3}{2}}} \sim \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}} = b_n$

Luego análogo al ejercicio **2**. $\displaystyle\sum_{\mathbf{n=1}}^{\infty} \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{n}}\sqrt{\mathbf{n^2+n}}}$, mediante el criterio de paso al límite entre a_n y b_n concluiremos que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}} + n^{\frac{3}{2}}}$ converge. ■

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\sqrt{n}$

Solución

Notemos que

$$\begin{aligned} a_n &= \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\sqrt{n} = \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\sqrt{n}\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\ &= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \end{aligned}$$

Luego por condición de necesidad, sí $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\sqrt{n}$ converge, es **necesario (pero no suficiente)** que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Vemos que $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \dfrac{1}{2} \neq 0$, luego la serie diverge. ■

9. $\displaystyle\sum_{n=e^2}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n)\cdot(\ln(\ln(n)))^p}$

Solución

Usemos el criterio de la integral:
$\displaystyle\sum_{n=e^2}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n)\cdot(\ln(\ln(n)))^p}$ converge *ssi* $\underbrace{\displaystyle\int_{e^2}^{\infty}\frac{dz}{z\ln(z)\cdot(\ln(\ln(z)))^p}}_{I}$ converge.

Vemos que si: $x=\ln(z)\longrightarrow dx=\dfrac{dz}{z}$. Así:

$$I=\int_2^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^p}\underbrace{=}_{u=\ln x\to du=\frac{dx}{x}}\int_{\ln(2)}^{\infty}\frac{du}{u^p}$$

Luego I converge *ssi* $\boxed{p>1}$. Concluyendo lo pedido. ■

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\pi\left(n+\frac{1}{n}\right)\right)$

Solución

Notemos que:

$$\sin\left(\pi\left(n+\frac{1}{n}\right)\right) = \cancelto{0}{\sin(\pi n)}\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + \cos(\pi n)\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Así demostrar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\pi\left(n+\frac{1}{n}\right)\right)$ converge $\Leftrightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ converge.

¡Propuesto! Demuestre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ converge.

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n)}{n^2}$

Solución

Trivial, por comparación: $\dfrac{\cos(n)}{n^2} \leq \dfrac{1}{n^2}$.

Luego $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n)}{n^2}$ converge.

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

Solución

Sabemos de MAT1610 que: $\ln(1+x) \sim x$ (Por Taylor). Así sea:

$$a_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$b_n = \frac{1}{n}$$

Por paso al límite:

$$A = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{-1/n^2}{1+1/n}}{\frac{-1}{n^2}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1 \neq 0$$

Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ diverge. ■

13. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin^2\left(\frac{1}{n^p}\right)$

Solución

Notemos que

$$n^2 \sin^2\left(\frac{1}{n^p}\right) \sim n^2 \left(\frac{1}{n^p}\right)^2 = \frac{n^2}{n^{2p}}$$

Comparamos al límite con $\frac{1}{n^q}$:

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \sin^2\left(\frac{1}{n^p}\right)}{\frac{1}{n^q}} = \lim_{n\to\infty} n^{2+q} \sin^2\left(\frac{1}{n^p}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^{2+q-2p} \frac{\sin^2\left(\frac{1}{n^p}\right)}{\frac{1}{n^{2p}}} = \lim_{n\to\infty} n^{2+q-2p}$$

Este límite existe *ssi*:

$$\begin{aligned} 2 + q - 2p &< 0 \\ 2 + q &< 2p \\ p &> 1 + \frac{q}{2} \end{aligned}$$

Luego finalmente como $q > 1$:

$$\Rightarrow p > 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$

Solución

Por criterio del cuocuiente tenemos:

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a^{n+1}(n+1!)}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{a^n n!}{n^n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} a\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty} a\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty} a\frac{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} a\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{-n-1}\right)^{-n-1}} \\
&= \frac{a}{e}
\end{aligned}$$

Converge absolutamente *ssi*

$$\begin{aligned}
0 \leq \frac{a}{e} < 1 \qquad &\Big/ \cdot e \\
0 \leq a < e &
\end{aligned}$$

Concluyendo lo pedido. ■

15. $\left(\frac{2}{1}\right) + \left(\frac{3}{3}\right) + \left(\frac{4}{5}\right) + \left(\frac{5}{7}\right) + \cdots$

Solución

Vemos que el término general a_n es:

$$a_n = \frac{n+1}{2n-1}$$

Luego por condición de necesidad tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2} \neq 0$$

Luego $\left(\frac{2}{1}\right) + \left(\frac{3}{3}\right) + \left(\frac{4}{5}\right) + \left(\frac{5}{7}\right) + \cdots$ diverge. ■

Problema 3

Determine los valores de a, para los cuales la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^n} \left(\frac{a-1}{a+1} \right)^{2n}$$

es absolutamente convergente y condicionalmente convergente.

¡Propuesto! Se hará la próxima ayudantía.