1.a) $a_k = \frac{3+5k^2}{k^2+k}$. Resolvemos el limite

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{3+5k^2}{k^2+k} = \lim_{k\to\infty} \frac{3/k^2+5}{1+1/k} = 5. \;//$$

1.b) $a_k = \frac{3^{k+2}}{5^k}$. Notemos que

$$a_k = \frac{3^{k+2}}{5^k} = 9\left(\frac{3}{5}\right)^k$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_k = 9 \lim_{k\to\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^k = 0 \;//$$

1.c) $a_k = \frac{e^k + e^{-k}}{e^{2k}-1}$. Resolvemos el limite.

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{e^k + e^{-k}}{e^{2k}-1}$$

Utilizamos el siguiente cambio de variable: $n = e^k$, si $k\to\infty$, entonces $e^k = n \to \infty$.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{e^k + e^{-k}}{e^{2k}-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+n^{-1}}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{-1}+n^{-3}}{1+n^{-2}} = 0 \;//$$

1.d) $a_k = \frac{(-3)^k}{k!}$. Analicemos la convergencia de $b_k = |a_k|$.

$$b_k = \frac{3^k}{k!} = \frac{3\cdot 3\cdot 3\cdot \ldots \cdot 3\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot k-1\cdot k}$$

$$= \frac{27}{6}\left(\frac{3\cdot 3\cdot 3\cdot \ldots \cdot 3\cdot 3}{4\cdot 5\cdot 6\cdot \ldots \cdot k-1\cdot k}\right)$$

$$= \frac{27}{6}\underbrace{\left(\frac{3\cdot 3\cdot 3\cdot \ldots \cdot 3}{4\cdot 5\cdot 6\cdot \ldots \cdot k-1}\right)}_{\leq 1}\frac{3}{k}$$

Luego

$$0 \leq b_k \leq \frac{81}{6k}$$

$$\lim_{k\to\infty} 0 \leq \lim_{k\to\infty} b_k \leq \lim_{k\to\infty} \frac{81}{6k}$$

$$0 \leq \lim_{k\to\infty} b_k \leq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} b_k = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} |a_k| = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_k = 0 \quad //$$

2.a.i) Veamos que a_n es monotona creciente por inducción. Sabemos que $a_1 = 1 \leq \sqrt{2} = a_2$. Supongamos que $a_n \leq a_{n+1}$ se cumple para algún $n = k$.

$$a_k \leq a_{k+1}$$

$$\sqrt{a_k} \leq \sqrt{a_{k+1}}$$

$$\sqrt{2a_k} \leq \sqrt{2a_{k+1}}$$

$$a_{k+1} \leq a_{k+2}$$

$$\Rightarrow a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$ ▨

2.a.ii) Veamos que $a_n \leq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$ por inducción. Sabemos que $a_1 = 1 \leq 2$. Supongamos que $a_n \leq 2$ para algun $n = k$.

$$a_k \leq 2$$

$$\sqrt{a_k} \leq \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2a_k} \leq \sqrt{4}$$

$$a_{k+1} \leq 2.$$

$$\Rightarrow a_n \leq 2 \ \forall n \in \mathbb{N}$$ ▨

2.b.i) Tenemos por (2.a.i) que la sucesión es monotona. Luego por (2.a.ii) sabemos que a_n es acotado, luego a_n converge.

2.b.i) Determinemos el limite.

$$L = \lim_{k\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} a_{n+1}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sqrt{2a_n}$$

$$= \sqrt{2 \lim_{k\to\infty} a_n}$$

$$\Rightarrow L = \sqrt{2L}$$

$$L^2 = 2L$$

$$L = 2$$ //

3.a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{3^n}$. Notemos que

geometrica $a=1, r=\frac{1}{3}$

geometrica $a=2, r=\frac{2}{3}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$= \frac{1}{1-1/3} + \frac{1}{1-2/3}$$

$$= \frac{3}{2} + 3 = \frac{9}{2}$$ //

3.b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^n}{n^2}$. Veamos que $a_n = \frac{e^n}{n^2}$ diverge. para ello tomemo la funcion

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2}, \quad f(n) = a_n.$$

Calculemos su limite

L'Hôpital

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} \to \infty$$

Luego $a_n \to \infty$. Por lo que su serie no converge. //

3.c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2+1}$.

$$S = \lim_{n\to\infty} s_n, \quad s_n = \sum_{i=2}^{n} a_n, \quad a_n = \frac{2}{n^2+1}$$

Ocupando Fracciones parciales, veamos el termino s_n

$$s_n = \sum_{i=2}^{n} \frac{2}{n^2-1} = \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-3} - \frac{1}{n-1}\right) + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} = \frac{3}{2} - \frac{2n-1}{n^2-n}$$

Luego

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2} - \frac{2n-1}{n^2-1} = \frac{3}{2} - \lim_{n\to\infty} \frac{2/n - 1/n^2}{1 - 1/n^2} = \frac{3}{2}$$