PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2022

Ayudantía 12 - MAT1610

1. Use la regla de sustitución para determinar las siguientes integrales indefinidas:

   (a) $\displaystyle\int \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+x)}dx$

   (b) $\displaystyle\int \frac{\text{sen}(4x)}{1+\cos^2(2x)}dx$

   (c) $\displaystyle\int \ln(\cos(x))\, tan(x)dx$

   (d) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}}$

   Solución:

   (a) Haciendo la sustitución $u = \arctan(\sqrt{x})$ se tiene que:
   $du = \frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $2du = \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$ y

   $$\int \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+x)}dx = \int 2udu = u^2 + C = \left(\arctan\left(\sqrt{x}\right)\right)^2 + C$$

   Nota: También se puede resolver aplicando dos veces la regla de sustitución:
   Primero $u = \sqrt{x}$ y luego $t = \arctan(u)$

   (b) Haciendo la sustitución $u = 1 + \cos^2(2x)$ se tiene que:
   $du = -4\cos(2x)\text{sen}(2x)dx = -2\text{sen}(4x)dx$, es decir, $-\frac{du}{2} = \text{sen}(4x)dx$ y

   $$\int \frac{\text{sen}(4x)}{1+\cos^2(2x)}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = -\frac{\ln(|1+\cos^2(2x)|)}{2} + C = -\frac{\ln(1+\cos^2(2x))}{2} + C$$

   Nota: También se puede resolver aplicando dos veces la regla de sustitución:
   Primero $u = \cos(2x)$ y luego $t = 1 + u^2$

   (c) Haciendo la sustitución $u = \ln(\cos(x))$ se tiene que
   $du = -\frac{1}{\cos(x)}\text{sen}(x)dx = -\tan(x)dx$ y

   $$\int \ln(\cos(x))\, tan(x)dx = -\int udu = \frac{u^2}{2} + C = -\frac{(\ln(\cos(x)))^2}{2} + C$$

   Nota: También se puede resolver aplicando dos veces la regla de sustitución:

   Primero escribir $\tan(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}$, hacer $u = \cos(x)$ y luego $t = \ln(u)$

(d) Note que $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}} = \int \frac{e^{-x}dx}{\sqrt{1-\left(e^{-x}\right)^2}}$, entonces, haciendo la sustitución $u = e^{-x}$, se tiene que $du = -e^{-x}dx$ o $-du = e^{-x}dx$ y

$$\int \frac{dx}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}} = \int \frac{-du}{\sqrt{1-u^2}} = \arccos(u) + C = \arccos\left(e^{-x}\right) + C$$

2. (a) Si f es continua tal que $\int_0^9 f(x)dx = 4$, determine $\int_0^3 xf(x^2)dx$

   (b) Sea $g(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{2(x+1)}$, demuestre que

$$\int_0^1 \frac{g'(x)dx}{\sqrt{1-g^2(x)}} = \frac{\pi}{6}$$

Solución:

(a) Haciendo la sustitución $u = x^2$ se tiene que $du = 2xdx$, $\frac{1}{2}du = xdx$ y si $x = 0$ entonces $u = u(0) = 0$ y si $x = 3$ entonces $u = u(3) = 9$, por lo que

$$\int_0^3 xf(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^9 f(u)du = \frac{1}{2}4 = 2$$

(b) Haciendo la sustitución $u = g(x)$ se tiene que $du = g'(x)dx$ y si $x = 0$ entonces $u = g(0) = -\frac{1}{2}$ y si $x = 1$ entonces $u = g(1) = 0$, entonces

$$\int_0^1 \frac{g'(x)dx}{\sqrt{1-g^2(x)}} = \int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \text{arcsen}(0) - \text{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$$

3. Suponga que $f : [3, 5] \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que

$$\int_3^x f(t)dt = (x^2 - 4^2)\text{arcos}(4 - x)$$

Calcule:

(a) $\int_2^{5/2} 3f(2x)dx$

(b) $f(4)$.

Solución:

a) Considere la sustitución $u = 2x$, con eso $du = 2dx$, obteniedno que

$$\int_2^{5/2} 3f(2x)dx = \int_4^5 \frac{3}{2}f(u)du = \int_4^3 \frac{3}{2}f(u)du + \int_3^5 \frac{3}{2}f(u)du$$

del enunciado tenemos que

$$\int_4^3 \frac{3}{2}f(u)du = 0 \text{ y que } \int_3^5 \frac{3}{2}f(u)du = \frac{27}{2}\pi$$

obteniendo que

$$\int_2^{5/2} 3f(2x)dx = \frac{27}{2}\pi$$

b) Observe que derivando ambos lados de la igualdad dada tenemos que:

$$f(x) = 2x\text{arcos}(4-x) - (x^2 - 4^4)\frac{1}{1+(4-x)^2}$$

evaluando en $x = 4$ obtenemos que

$$f(4) = 8\text{arcos}(0) = 4\pi.$$

4. Sea R la región acotada por la parábola $y = x - x^2$ y el eje x.

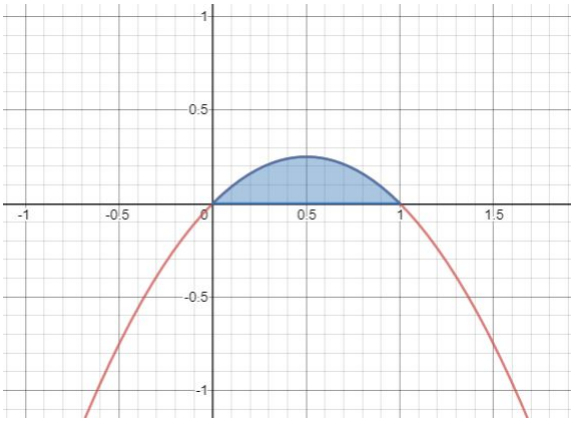
   (a) Determine el área de la región R.

   (b) ¿Existe una recta que pasa por el origen que divide a la región R en dos partes de igual área? ¿Cuál es la pendiente de la recta?

Solución:

(a) El área, A_R de la región R es:

$$A_R = \int_0^1 (x - x^2)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

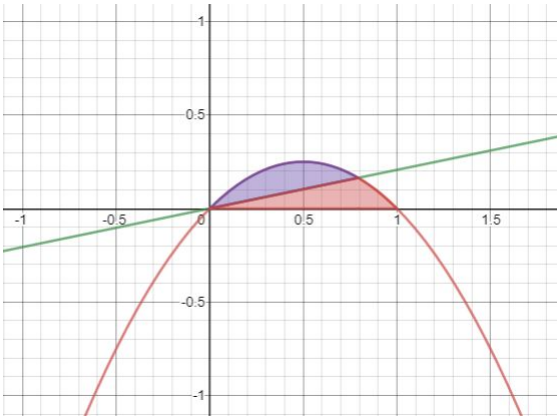


(b) La mitad del área es $\frac{1}{12}$. Si existe la recta solicitada, tiene ecuación del tipo $y = mx$. el valor de m debe ser positivo, para que pueda dividir la región en dos regiones de igual área y pasar por el origen. Sea (a, b) el punto de intersección de la recta y la parábola. Note que $m = \frac{b}{a}$, y que $b = a - a^2$, entonces, $m = \frac{a-a^2}{a} = 1 - a$

$$A_1 = \int_0^a \left(x - x^2 - mx\right) dx = \int_0^a \left(x - x^2 - (1-a)x\right) dx = \int_0^a \left(ax - x^2\right) dx$$

Así,

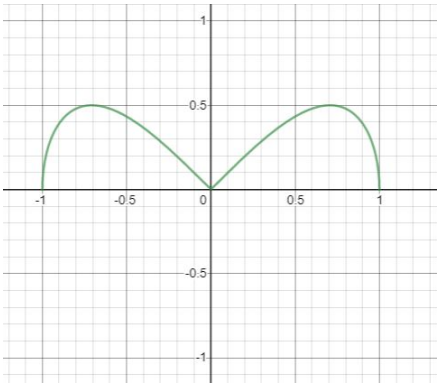
$$A_1 = \left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a = \frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} = \frac{a^3}{6}$$



Entonces, para que el área de la región superior A_1, corresponda a la mitad del área, debe ocurrir que $\frac{a^3}{6} = \frac{1}{12}$, es decir, $a = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

Por lo tanto, El valor de la pendiente es $m = 1 - \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

5. La gráfica dada en la figura corresponde a la función $f(x) = \sqrt{x^2 - x^4}$. Determine el área comprendida entre las curvas asociadas a $f(x) = \sqrt{x^2 - x^4}$ y $g(x) = -\sqrt{x^2 - x^4}$.
Solución:

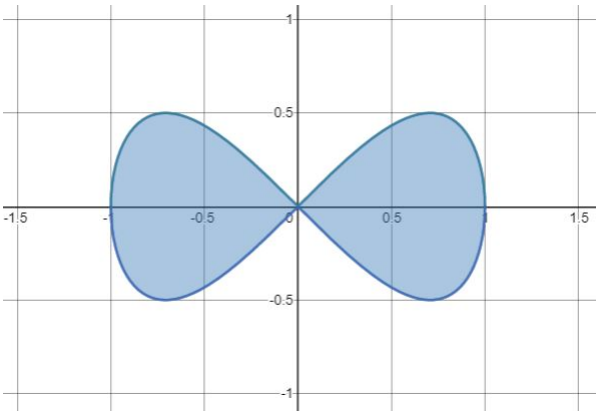


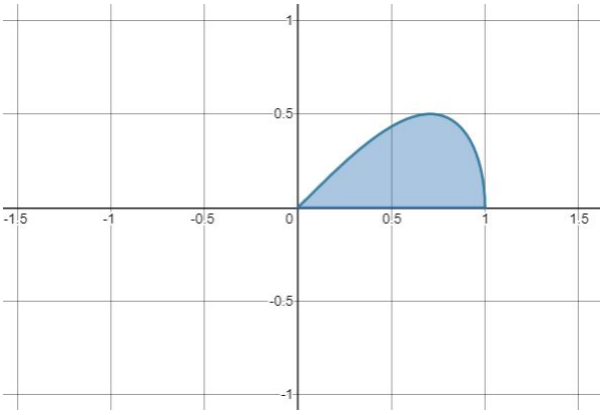
La región de interés está sombreada en la figura:
Notar que $f(x) = \sqrt{x^2 - x^4} = |x|\sqrt{1 - x^2}$ y $g(x) = -\sqrt{x^2 - x^4} = -|x|\sqrt{1 - x^2}$ entonces el dominio de ambas funciones es $[-1, 1]$. Dada la simetría con respecto ambos ejes coordenados, una manera de obtener el valor del área A es multiplicar por 4 el valor del área ubicada en el primer cuadrante, como:

$$A = 4\int_0^1 \sqrt{x^2 - x^4}dx = 4\int_0^1 |x|\sqrt{1 - x^2}dx = 4\int_0^1 x\sqrt{1 - x^2}dx = 2\int_1^0 (-2)x\sqrt{1 - x^2}dx$$

Haciendo el cambio de variable $u = 1 - x^2$, $du = -2xdx$, se tiene que si $x = 0$ entonces, $u = 1$ y si $x = 1$ entonces, $u = 0$:

$$A = 2\int_0^1 \sqrt{u}du = 2\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_0^1 = \frac{4}{3}$$


1
0.5
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1.5
-0.5
-1


1
0.5
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
-0.5
-1