Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

MAT 1610 - Cálculo I.
Control 1.

FILA A

Nombre: _____

Sección:_____

Tiempo : 50 minutos

Fecha : 29 de Abril de 2016

1. Demostrar que si f es una función dos veces derivable que admite 3 raíces distintas en un intervalos abiero I, entonces f'' tiene por lo menos una raíz en I.
Solución
según la hipótesis, tenemos que

$$\exists \alpha \in I \exists \beta \in I \exists \gamma \in I (f(\alpha) = f(\beta) = f(\gamma) = 0$$

además como son puntos distintos, podemos suponer sin pérdida de generalidad que

$$\alpha < \beta < \gamma$$

0,5 pts.
Luego como se cumplen las hipótesis del Teorema de Rolle, tenemos que:

$$\exists a \in (\alpha,\, \beta)(f'(a) = 0 \wedge \exists b \in (\beta,\, \gamma)(f'(b) = 0)$$

0,75 pts.
Por lo tanto, volviendo a aplicar el Teorema de Rolle, se tiene que

$$\exists c \in (a,\, b)(f''(c) = 0$$

y como $(a,\, b) \subset I$ hemos encontrado una raíz de f'' en I. **0,75 pts.**

2. Sea $f(x) = \dfrac{2x^2}{x-1}$ función real con dominio $\mathbb{R} - \{1\}$. Determine intervalos de crecimiento y decrecieminto.
Solución
Tenemos que

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 4x}{(x-a)^2} = \frac{2x(x-2)}{(x-1)^2}$$

1,0 pts.
Por lo tanto f es creciente en $(-\infty,\, 0) \cup (2,\, \infty)$
y es decreciente en $(0,\, 1) \cup (1, 2)$.
1,0 pts.
Observación: si no excluyen el 1 **de la respuesta, se quita 0,5pts.**

3. Dada la función real $f(x) = \left(\frac{2\sqrt{1+x}}{1+x^2}\right)^{\ln(x)}$ entonces el valor de $f'(1)$ es:

a) $\sqrt{2}\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

b) $\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

c) $\ln(\sqrt{2})$ **Respuesta correcta2,0 pts.**

d) $\ln\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$

e) Ninguna de las anteriores.

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

MAT 1610 - Cálculo I.
Control 1.

FILA B

Nombre: _____

Sección:_____

Tiempo : 50 minutos

Fecha :29 de Abril de 2016

1. Sea $f(x)$ una función continua en $[0,\ 4]$ y derivable en $(0,\ 4)$ tal que $f(0) = 0$. Demuestre que si $f'(x) \leq x$ en $[0,\ 4]$, entonces $f(4) \leq 16$.
   Solución
   Dado que:
   $$\frac{f(4)}{4} = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0}$$
   0,5 pts.

   y la función f cumple con los requisitos del Teorema del Valor medio en el intervalo $[0,\ 4]$,entonces
   $$\frac{f(4)}{4} = f'(\alpha),\ \alpha \in (0, 4)$$
   1,0 pts.
   Dado que $\alpha < 4$ tenemos que
   $$\frac{f(4)}{4} = f'(\alpha) \leq \alpha < 4$$
   y esto nos dice que
   $$f(4) \leq 16$$
   0,5 pts.

2. Sea $f(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x + 1}$ función real con dominio $\mathbb{R} - \{-1\}$. Determine intervalos de crecimiento y decrecieminto.
   Solución
   Tenemos que
   $$f'(x) = \frac{2x^2 + 4x + 1}{(x + 1)^2}$$
   1,0 pts.
   Las raíces del numerador son $-1 \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ entonces
   f es creciente 2n $(-\infty,\ -1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}) \cup (-1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \infty)$

y es decreciente en $(-1-\frac{\sqrt{2}}{2}, -1) \cup (-1, -1+\frac{sqrt2}{2}$

1,0 pts.

Observación: si no excluyen el -1 de la respuesta, se quita 0,5pts.

3. Dada la función real $f(x) = \left(\frac{\sqrt{1+x}}{1+x}\right)^{\ln(x)}$ entonces el valor de $f'(1)$ es:

   a) $\frac{\ln(\sqrt{2})}{2}$

   b) $\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

   Respuesta Correcta

   2,0 pts.

   c) $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln(\sqrt{2})$

   d) $\ln\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$

   e) Ninguna de las anteriores.