FACULTAD DE MATEMÁTICAS
PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE CHILE

Examen
MAT1610 - Cálculo I

1. Calcule

   (a) $f'(x)$ si $f(x) = \operatorname{sen}(\tan(x^2))$.

   (b) Escriba suma de Riemann para $\int_2^5 x^2 + 1\,dx$ y evalúe para $n = 3$ (partición con 3 subintervalos).

   (c) $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$.

   (d) $\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\,dx$.

   Solución:

   (a) $f'(x) = \cos(\tan(x^2))\sec^2(x^2)2x$.

   (b) Si consideramos los extremos derechos de cada intervalo para evaluar la función, obtenemos

   $$R_n = \frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}(2+\frac{3k}{n})^2 + 1 = \sum_{k=1}^{n}\frac{3\,(4n^2+12kn+9k^2)}{n^3}.$$

   Evaluando para $n = 3$ obtenemos

   $$\begin{aligned}\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}(2+\frac{3k}{n})^2 + 1 &= \sum_{k=1}^{3}(2+k)^2+1\\ &= (2+1)^2+1+(2+2)^2+1+(2+3)^2+1\\ &= 53.\end{aligned}$$

   (c) Como $-\sqrt{x} \le \sqrt{x}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \le \sqrt{x}$, podemos usar el teorema del sandwich para concluir que $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

   (d) $\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \left[\frac{1}{2}(\ln(x))^2\right]_1^e = \frac{1}{2}$.

   Puntaje:

   15 puntos cada parte. Cualquier error no trivial, 0 puntos.

2. Considere la función definida por

   $$f(x) = \frac{x^4 - 2x^3 + 3x}{x+1}$$

   (a) Determine el dominio de f.

   (b) Determine el/los intervalo/s donde la función es creciente.

   (c) Determine el/los intervalo/s donde la función es cóncava hacia arriba.

(d) Determine las asíntotas que tenga (horizontal,vertical,oblicua) o indique por qué no las tiene.

(e) Encuentre los puntos en que alcanza valor máximo y/o mínimo local.

(f) Encuentre el/los punto/s de inflexión.

(g) Grafique considerando los elementos anteriores.

Nota 1: Considere reescribir la definición de la función de alguna forma equivalente, si eso le ayuda a simplificar los cálculos posteriores.

Nota 2: La función podría no tener uno o más de estos elementos.

Solución: Si $x \neq -1$ podemos simplificar la fracción

$$f(x) = \frac{x^4 - 2x^3 + 3x}{x+1} = x^3 - 3x^2 + 3x \qquad \text{si } x \neq -1$$

Calculamos las derivadas

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2$$

$$f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$$

(a) El dominio de f es $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

(b) Como $f'(x) \geq 0$ para todo x, la función es creciente en su dominio.

(c) La función es cóncava hacia arriba cuando la segunda derivada es positiva, es decir en el intervalo $(1, \infty)$ o $[1, \infty)$.

(d) La función se indefine en $x = -1$ pero no tiene asíntota vertical allí pues el límite es finito por ambos lados. Tampoco tiene asíntotas horizontales pues

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

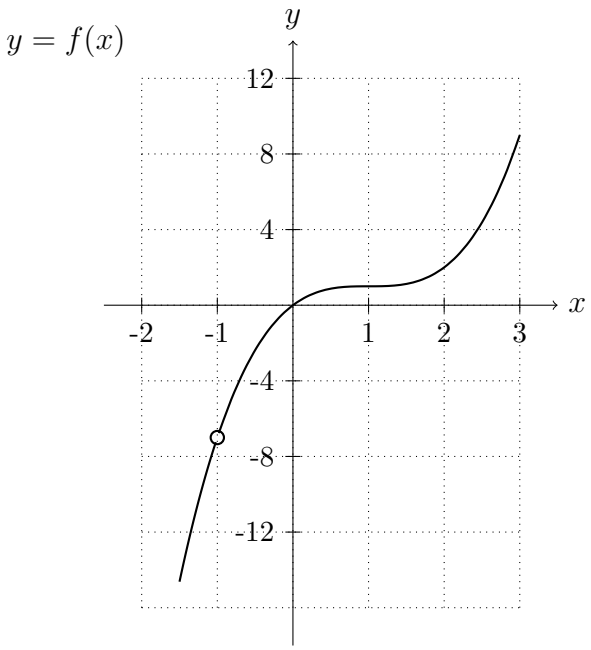
Asíntotas oblicuas no tiene pues

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$$

(e) El único punto crítico de la función es $x = 1$ pero allí no alcanza valor máximo ni mínimo local pues la función es siempre creciente.

(f) En $x = 1$ la segunda derivada cambia de signo por lo que es un punto de inflexión.

(g) Nótese que en la gráfica debemos identificar el punto donde la función se indefine.



Puntaje:

- Simplifica la expresión para $f(x)$.[6 ptos]
- Calcula las derivadas. [6 ptos]

(a) Basta con dar el dominio.[6 ptos]
(b) Creciente en su dominio. [6 ptos]
(c) Concavidad. [6 ptos]
(d) No asíntotas. [6 ptos] Solo 3 si no justifica.
(e) Punto crítico identificado como no extremo. [6 ptos]
(f) Punto de inflexión [6 ptos] 2 si solo argumenta que la segunda derivada se anula.
(g) Gráfica cualitativamente correcta. [12 ptos] -3 si no identifica punto donde la función no está definida.

3. Calcule las siguientes integrales

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^4(x)\,dx.$

(b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x-2}{x^3+4x}\,dx.$

(c) $\displaystyle\int \text{sen}(x)e^x\,dx.$

(d) $\displaystyle\int \frac{4u^3}{\sqrt{1+2u^2}}\,du.$

Solución:

(a) Como $\sec^2(x) = 1 + \tan^2(x)$, podemos hacer $u = \tan(x),\ du = \sec^2(x)dx$.

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^4(x)\,dx &= \int_0^1 (1+u^2)\,du \\ &= \left[u + \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 \\ &= 1 + \frac{1}{3} \\ &= \frac{4}{3}\end{aligned}$$

(b) Para usar el método de fracciones parciales, debemos descomponer

$$\frac{x-2}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}.$$

Para encontrar los coeficientes A, B, C debemos resolver

$$A(x^2+4) + Bx^2 + Cx = x - 2$$

Evaluando en $x = 0$ obtenemos $A = -\frac{1}{2}$. Comparando coeficientes, $C = 1$ y $B = \frac{1}{2}$.

$$-\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{dx}{x} = -\frac{\ln(2)}{2}.$$

Usando $u = x^2 + 4$, $du = 2xdx$

$$\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{x}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{4}\int_5^8 \frac{du}{u} = \frac{\ln(8)-\ln(5)}{4} = \frac{3\ln(2)-\ln(5)}{4}.$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2+4} = \left[\frac{1}{2}\arctan(\frac{x}{2})\right]_1^2 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\arctan(\frac{1}{2}).$$

Finalmente

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{x-2}{x^3+4x}\,dx &= -\frac{\ln(2)}{2} + \frac{3\ln(2)-\ln(5)}{4} + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\arctan(\frac{1}{2}) \\ &= \frac{\ln(2)-\ln(5)}{4} + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\arctan(\frac{1}{2})\end{aligned}$$

(c) $\int \operatorname{sen}(x)e^x\,dx$. Por partes con $u = \operatorname{sen}(x),\ dv = e^x\,dx$. Entonces $du = \cos(x)dx$ y $v = e^x$

$$\int \operatorname{sen}(x)e^x\,dx = \operatorname{sen}(x)e^x - \int \cos(x)e^x\,dx$$

Volvemos a integrar por partes con $u = \cos(x),\ dv = e^x\,dx$.
Entonces $du = -\operatorname{sen}(x)dx$ y $v = e^x$.

$$\int \operatorname{sen}(x)e^x\,dx = \operatorname{sen}(x)e^x - \cos(x)e^x + \int \operatorname{sen}(x)e^x\,dx$$

Podemos agrupar y despejar para obtener

$$\int \operatorname{sen}(x)e^x\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(x)e^x - \frac{1}{2}\cos(x)e^x + c$$

(d) Haciendo la sustitución $x = \sqrt{1+2u^2}$, $dx = \dfrac{2u}{\sqrt{1+2u^2}}du$ tenemos

$$\begin{aligned}\int \frac{4u^3}{\sqrt{1+2u^2}}dx &= \int (x^2-1)dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 - x + c \\ &= \frac{1}{3}(x^2-3)x + c \\ &= \frac{1}{3}(2u^2-2)\sqrt{1+2u^2} + c \\ &= \frac{2}{3}(u^2-1)\sqrt{1+2u^2} + c\end{aligned}$$

Puntaje:

15 ptos cada integral. Si tiene algún error menor, descontar 5 puntos. Con errores conceptuales o importantes, 0 ptos.

4. Calcule el volumen del sólido que se obtiene al rotar la región delimitada por el eje x, la recta $x = 2$ y la parábola $y = x^2$ en torno a la recta $x = -1$. Haga un esbozo de la región mostrando el eje en torno al que se rota.

   Solución: Usando el método de cascarones cilíndricos tenemos

$$V = \int_0^2 2\pi(x+1)x^2 dx = 2\pi \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 2\pi(4 + \frac{8}{3}) = \frac{40\pi}{3}$$

   Puntaje:

   - Esbozo correcto de la región y del eje de giro. [15 ptos]
     - Dibuja la parábola $y = x^2$ y el eje x (5 ptos).
     - Marca correctamente la región entre $x = 0$ y $x = 2$ bajo la parábola (5 ptos).
     - Dibuja y destaca el eje de giro $x = -1$ (5 ptos).
   - Elección adecuada del método (cascarones cilíndricos o secciones transversales).[10 ptos]
     - Reconoce que el eje de giro es vertical y propone cascarones cilíndricos con dx (o, alternativamente, secciones transversales bien planteadas con dy) (5 ptos).
     - Explica o indica de forma clara qué representan radio y altura en el sólido (5 ptos).
   - Planteamiento correcto de la integral (radio, altura, límites, fórmula de volumen). [20 ptos]
     - radio $r(x) = x + 1$ (7 ptos).
     - altura $h(x) = x^2$ (7 ptos).
     - fórmula integral con límites correctos (6 ptos).
   - Cálculo integral correcto y resultado numérico correcto. [15 ptos]

Instrucciones:

- Cada pregunta vale 60 puntos, las partes de una pregunta valen lo mismo.
- Justifique todas sus respuestas.
- **En caso de ser sorprendido con un celular, tablet u otro dispositivo electrónico durante la prueba, esta será evaluada con nota mínima.**
- Duración: 150 minutos.