Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo semestre de 2013

MAT1610 ⋆ Cálculo I

Interrogación N° 1

1. a) Determine $a \in \mathbb{R}$, de modo que:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+ax+1}-x\right) = 2$$

Solución
$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+ax+1}-x\right) = \lim_{x\to\infty} \dfrac{ax+1}{\sqrt{x^2+ax1+x}} = \dfrac{a}{2}$
Como queremos que ese límite valga 2, entonces
(**5 pts**)

$$a = 4$$

(**1 pts**)

b) Dada

$$f(x) = \frac{(\sqrt[3]{x}-1)(1-\cos(x))}{(\sqrt{x}-1)\,x\,\operatorname{sen}(x)}$$

Analice la continuidad de f y redefínala para que sea continua en todo $\mathbb{R}$..
PREGUNTA ELIMINADA

2. a) Considere la función ;

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}} & \text{si } x > 1 \\ \\ ax + b & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

Encuentre los valores de a y b para que f sea derivable en $x = 1$.
Solución
En primer lugar, necesitamos que f sea continua en $x = 1$.

Para ello
$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = a + b$
Luego
$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}} = \lim_{x\to 1^+} \dfrac{(1-x)(1+\sqrt{x})}{(1-x)} = 2$
Por lo tanto

$$a + b = 2$$

(**1.4 pts**)

Ahora veamos que sea derivable en $x = 1$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{a(1+h)+b-(a+b)}{h} = a = \lim_{h\to 0^+} \frac{\dfrac{1-(1+h)}{1-\sqrt{1+h}} - (2)}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{1+h}-1}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h(\sqrt{1+h}+1)} = \frac{1}{2}. \qquad (\textbf{1.4 pts})$$

Por lo tanto ,

$$a = \frac{1}{2} \text{ y } b = \frac{3}{2}.$$

(**0.2 pts**)

b) Sea f una función continua tal que:
Máximo $\{f(x) : x \in [a, b]\} = a^2$ y Mínimo $\{f(x) : x \in [a, b]\} = b^2$.
Demuestre que existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c^2$.

Solución

Tenemos que: $b^2 \leq f(x) \leq a^2$, $\forall x \in [a, b]$
(**0.5pts**)
Sea $g(x) = f(x) - x^2$.
(**0.5pts**)

Entonces g es función continua en $[a, b]$ y además $g(a) = f(a) - a^2 \leq 0$ y $g(b)f(b) - b^2 \geq 0$.
Por teorema visto en clase, existe $c \in [a, b]$ tal que $g(c) = 0$.
(**1.5 pts**)
Luego

$$\exists c \in [a, b](f(c) = c^2.$$

(**0.5 pts**)

3. Si

$$y = \frac{x}{\sqrt{a^2-1}} - \frac{2}{\sqrt{a^2-1}} \arctan\left(\frac{\text{sen}(x)}{a + \sqrt{a^2-1} + \cos(x)}\right)$$

Solución

$$y = \frac{x}{\sqrt{a^2-1}} - \frac{2}{\sqrt{a^2-1}} \arctan\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{a+\sqrt{a^2-1}+\cos(x)}\right)$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{a^2-1}} - \frac{2}{\sqrt{a^2-1}} \frac{1}{1+\dfrac{\operatorname{sen}^2(x)}{(a+\sqrt{a^2-1}+\cos(x))^2}} \frac{\cos(x)(a+\sqrt{a^2-1}+\cos(x))+\operatorname{sen}^2(x)}{(a+\sqrt{a^2-1}+\cos(x))^2} =$$

$$\frac{a^2+a\sqrt{a^2-1}-1}{(a+\cos(x))(a\sqrt{a^2-1}+a^2-1)} = \frac{1}{a+\cos(x)}$$

(**3.0 pts**)

$$y'' = \frac{\operatorname{sen}(x)}{(a+\cos(x))^2}.$$

(**3.0 pts**)

4. La siguiente figura corresponde la bosquejo del gráfico de la derivada de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se define $g(x) = f(x^2-1)$. Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función g.

Solución
Para saber donde la función g crece, necesitamos deteerminar los intervalos donde $g' > 0$. Dado que:

$$g'(x) = f'(x^2-1)2x$$

(**1.0 pts**)
Si $x > 0$, se tiene que $g'(x) > 0$ si y sólo si $f'(x^2-1) > 0$ es decir $x \in]0\sqrt{6}[$.
(**1.5 pts**)
Si $x < 0$, tenemos que $g'(x) > 0$ si y sólo si $f'(x^2-1) < 0$ es decir $x \in]-\infty, -\sqrt{6}[$
(**1.5 pts**)
Por lo tanto g es creciente en $]-\infty, -\sqrt{6}[\cup]0, \sqrt{6}[$ y es decreciente en $]-\sqrt{6}, 0[\cup]\sqrt{6}, \infty[$.
(**2.0 pts**)